



## Estimating Time of a Simple Step Change in Non-conforming Items in High-Yield Processes

Rassoul Noorossana\*, Kamran Peynabar & Mona Moradimanesh

*Rassoul Noorossana, Industrial Engineering Department, Iran University of Science and Technology,*

*Kamran Peynabar, Ph.D. Student of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109-2117,*

*Mona Moradimanesh, Industrial Engineering Department, Islamic Azad University—South Tehran Branch, Tehran, Iran*

### Keywords

Statistical Process Control (SPC),  
Change Point,  
Simple Step Change,  
Built-in Estimator,  
Cumulative Sum control chart  
(CUSUM),  
Exponential Weighted Moving  
Average control chart (EWMA),  
Average Run Length (ARL),  
Confidence Set

### ABSTRACT

*Knowing about the real time of a change in the parameter(s) of a statistical process would enable users to identify root causes more quickly and precisely. Due to the sensitivity and importance of reaching zero defects in high quality processes, to be aware of the change time would be so precious. In this paper, we consider the performance of the Maximum Likelihood Estimator in comparison with built-in change point estimators of Cumulative Sum (CUSUM) and Exponential Weighted Moving Average (EWMA) control charts. Using likelihood function approach, we also proposed a confidence set for the change point. The results of a Monte-Carlo simulation have shown the priority of the MLE in identifying the real time of the change.*

© 2012 IUST Publication, IJIEPM. Vol. 22, No. 4, All Rights Reserved

\*  
Corresponding author. Rassoul Noorossana  
Email: [rassoul@iust.ac.ir](mailto:rassoul@iust.ac.ir)



## برآورد زمان تغییر پله ای ساده در نسبت اقلام معیوب در فرآیندهای با کیفیت بالا

رسول نورالسنا\*، کامران پی‌نبر و مونا مرادی منش

### چکیده:

اطلاع داشتن از زمان واقعی تغییر در پارامترهای یک فرآیند تولید، به کاربران این امکان را می‌دهد تا علل ریشه ای تغییر را در زمان کوتاه‌تر و با دقت بیشتر شناسایی کنند. در فرآیندهای با کیفیت بالا، بدلیل حساسیت و اهمیت زیاد رسیدن به نقص صفر، برآورد این زمان دستاوردهای ارزشمندی را به همراه خواهد داشت. در این مقاله، مقایسه‌ای میان عملکرد برآوردکننده درستنمایی بیشینه و برآوردکننده های ذاتی نمودارهای کنترل تجمعی هندسی (CUSUM) و میانگین موزون درستنمایی (EWMA) صورت گرفته است. همچنین، با استفاده از رویکرد تابع احتمالی، یک مجموعه اطمینان برای نقطه تغییر پیشنهاد شده است. نتایج حاصل از شبیه سازی مونت کارلو برتری عملکرد برآوردکننده پله ای ساده را نسبت به برآوردکننده‌های ذاتی نشان می‌دهد.

### کلمات کلیدی

کنترل کیفیت آماری،  
نقطه تغییر، تغییر پله ای ساده،  
برآورد کننده های ذاتی،  
نمودار کنترل تجمعی هندسی، نمودار  
کنترل میانگین موزون متحرک وزنی،  
میانگین طول دنباله، مجموعه اطمینان

### ۱. مقدمه

نمودارهای کنترل یکی از مهمترین ابزارها جهت کنترل و پایش فرایندها می‌باشند. یکی از مسائلی که کاربران در بکارگیری هر نمودار کنترل با آن روبرو هستند، برآورد زمان تغییر فرایند پس از مشاهده یک هشدار از نمودار کنترل است. هنگامیکه یک نمودار کنترل، وجود انحراف با دلیل در فرایند را هشدار می‌دهد، مهندس فرایند جستجو را برای شناسایی منبع انحراف آغاز می‌نماید. بنابراین اطلاع داشتن در مورد اینکه فرایند در چه زمانی تغییر کرده، می‌تواند جستجو را تا حد بسیار زیادی ساده نماید. اگر بتوان زمان تغییر را تعیین نمود، مهندسين فرایند بر روی پنجره کوچکی حول زمان تعیین شده تمرکز کرده و در زمان بسیار

تاریخ وصول: ۸/۸/۸۹

تاریخ تصویب: ۲/۳/۹۰

\*تویسنده مسئول مقاله: دکتر رسول نورالسنا، دانشکده صنایع، دانشگاه

علم و صنعت ایران، [rassoul@iust.ac.ir](mailto:rassoul@iust.ac.ir)

کامران پی‌نبر، دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی صنایع و تحقیق در عملیات، دانشگاه میشیگان، امریکا

مونا مرادی منش، دانشکده صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، [m.moradimanesh@gmail.com](mailto:m.moradimanesh@gmail.com)

کمتری ریشه انحراف بادلیل را مشخص و برای حذف آن اقدام می‌نمایند. در این مقاله عملکرد روش MLE در برآورد دوره تغییر که توسط نورالسنا و همکاران [۱،۲] آرایه گردید با برآورد کننده ذاتی<sup>۲</sup> نمودارهای کنترل EWMA و CUSUM هندسی که برآوردی از زمان تغییر را ارائه می‌دهند، در حالتیکه تغییر سطح فرایند در یک نقطه مورد نظر می باشد، مورد مقایسه قرار می گیرد. مقایسه براساس صحت و دقت برآورد کننده ها صورت می گیرد.

همچنین با توجه به خصوصیات برآورد کننده MLE مجموعه اطمینان<sup>۳</sup> تقریبی که دوره تغییر واقعی فرایند را پوشش می دهد، آرایه می گردد. لازم به ذکر است که مقایسات مشابهی در حالتیکه نوع تغییر از نوع پله ای ساده است، برای میانگین فرآیند نرمال، پارامتر نرخ فرایند پواسون و نسبت اقلام معیوب به ترتیب توسط پیگناتیلو و ساموئل [۳]، پیگناتیلو و سیمپسون [۴] و همچنین پری و پیگناتیلو [۵] انجام شده است.

<sup>2</sup> Built-in

<sup>3</sup> Confidence Set

که در آن  $X_i$  مقدار مشاهده در پریود  $\tau$  و  $L(\cdot)$  تابع درستنمایی را نشان می‌دهد. برآورد کننده  $\tau$  مقداری از  $\tau$  است که تابع درستنمایی یا لگاریتم آن را بیشینه می‌سازد. با لگاریتم گیری از این تابع و عملیات جبری رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\log_e L(\tau, p_1 | \mathbf{x}) = \tau \log_e p_0 + \left( \sum_{i=1}^{\tau} x_i - \sum_{i=\tau+1}^T x_i \right) \log_e (1 - p_0) - \tau \log_e (1 - p_0) + (T - \tau) \log_e p_1 + \left( \sum_{i=\tau+1}^T x_i - T + \tau \right) \log_e (1 - p_1) \quad (3)$$

با مشتق گیری نسبت به  $p_1$ ، به سادگی می‌توان نشان داد که به ازای هر  $\tau$  مقداری از  $p_1$  که تابع درستنمایی را بیشینه می‌سازد به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\hat{p}_1(\tau) = \frac{T - \tau}{\sum_{i=\tau+1}^T x_i} \quad (4)$$

با جایگذاری  $\hat{p}_1(\tau)$  به جای  $p_1$  در تابع درستنمایی و ساده سازی رابطه به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\log_e L(\tau | \mathbf{x}) = \tau \log_e \left( \frac{p_0(1 - \hat{p}_1(\tau))}{\hat{p}_1(\tau)(1 - p_0)} \right) - \frac{T - \tau}{\hat{p}_1(\tau)} \log_e \left( \frac{1 - p_0}{1 - \hat{p}_1(\tau)} \right) + T \log_e \left( \frac{\hat{p}_1(\tau)}{1 - \hat{p}_1(\tau)} \right) \quad (5)$$

بنابراین برآورد  $MLE$  دوره تغییر (آخرین دوره تحت کنترل) که مقدار تابع درستنمایی را بیشینه می‌سازد عبارتست از:

(6)

نورالسنا و همکاران [۱،۲] این برآورد کننده را زمانیکه نمودار حدود احتمال هندسی اعلام هشدار می‌نماید، اعمال نمودند. در ادامه کاربرد این برآورد کننده در نمودارهای کنترل  $EWMA$  و  $CUSUM$  هندسی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

#### ۲-۱. نمودار کنترل $CUSUM$ هندسی

زی و همکاران [۶] نمودار کنترل جمع تجمعی ( $CUSUM$ ) را در دو حالت ماسک  $V$  و جدولی<sup>۲</sup> برای توزیع هندسی پیشنهاد نمودند. بروک و ایوانز [۷] نیز برای توزیع هندسی با مقدار حداقل نسبت اقلام معیوب تحت کنترل  $0.02$  نمودار کنترل  $CUSUM$  هندسی طراحی نمودند. ایشان بیان می‌کنند که روش پیشنهادی که بر اساس استفاده از زنجیره مارکوف می‌باشد

<sup>2</sup> V-mask

<sup>3</sup> Tabular

در بخش بعدی، با این فرض که در پارامتر نسبت اقلام معیوب یک فرآیند باکیفیت بالا تغییری از نوع پله ای ساده رخ داده است، مدل آماری مربوطه را مورد بررسی قرار داده و با استفاده از این مدل به محاسبه برآورد کننده درستنمایی ماکزیمم پرداخته شده است.

#### ۲. مدل آماری تغییر پله‌ای ساده و توسعه برآورد

##### کننده $MLE$

یک فرایند با کیفیت بالا را که در حالت اولیه با نسبت اقلام معیوب (پارامتر) معلوم  $p = p_0$  تحت کنترل می‌باشد را در نظر بگیرید. به منظور پایش این فرایند از نمودار کنترل هندسی (رابطه ۱) استفاده می‌شود که در آن هر مشاهده<sup>۱</sup> به صورت تعداد واحدهای تولید شده تا تولید اولین واحد معیوب تعریف شده و مستقل از سایر مشاهدات می‌باشد. در یک زمان نامشخص پارامتر فرایند به سطح جدید و نامعلوم  $p = p_1$  تغییر نموده و تا زمان هشدار نمودار کنترل هندسی در همان سطح  $p_1$  باقی می‌ماند. به عبارت دیگر نسبت اقلام معیوب فقط در یک نقطه تغییر نموده و این سطح جدید تا زمان شناسایی انحراف با دلیل و رفع آن ثابت است.

$$UCL = 1 + \frac{\ln(\alpha/2)}{\ln(1 - p_0)} \quad (1)$$

$$LCL = \frac{\ln(1 - \alpha/2)}{\ln(1 - p_0)}$$

که در آن  $\alpha$  خطای نوع اول نمودار کنترل می‌باشد. فرض کنید که زمان سپری شده بین تولید واحد معیوب  $(i-1)$  و  $i$  (مدت زمان بین دو مشاهده  $(i-1)$  و  $i$ ) به عنوان دوره  $i$  تعریف شود. فرایند تا دوره  $\tau$  تحت کنترل بوده و سپس به سطح جدید تغییر می‌یابد. همچنین نمودار کنترل در دوره  $T$  (دوره فعلی)، اعلام هشدار می‌نماید. به عبارت دیگر مشاهدات  $i = 1, 2, \dots, \tau$  از یک توزیع هندسی با پارامتر  $p_i = p_0$  پیروی کرده و مشاهدات  $i = \tau + 1, \tau + 2, \dots, T$  از یک توزیع هندسی با پارامتر  $p_i = p_1$  پیروی می‌کنند. دوره تغییر نامعلوم  $\tau$  به عنوان آخرین دوره ای که در آن فرایند تحت کنترل بوده است در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که این مدل تحت عنوان مدل تغییر سطح نامیده می‌شود. با استفاده از برآورد کننده درستنمایی بیشینه ( $MLE$ ) برآورد پریود تغییر ( $\hat{\tau}$ ) مدل تغییر سطح توسط نورالسنا و همکاران [۱،۲] به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$L(\tau, p_1 | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{\tau} p_0(1 - p_0)^{x_i - 1} \prod_{i=\tau+1}^T p_1(1 - p_1)^{x_i - 1} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Observation

CUSUM هندسی از سمت بالا و پایین معرفی شده به صورت زیر به دست می‌آید:

در قسمتهای بعدی، عملکرد  $\hat{t}_{MLE}, \hat{t}_{CUSUM}$  در تشخیص دوره تغییر در حالتیکه نمودار کنترل CUSUM هندسی اعلام هشدار می‌نماید، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۳. نمودار کنترل EWMA هندسی

روبرتز [۱۱] برای نخستین بار نمودار کنترل EWMA را جهت کنترل میانگین توزیع نمایی پیشنهاد نمود. آماره این نمودار به صورت  $Z_i = \lambda X_i + (1-\lambda)Z_{i-1}$  تعریف می‌شود که در آن  $X_i$  مشاهده در زمان  $i$  و  $0 < \lambda \leq 1$  ثابت هموارسازی بوده و مقدار اولیه ( $Z_0$ ) هدف یا میانگین فرایند در نظر گرفته می‌شود. حدود کنترل این نمودار با استفاده از روابط

$$LCL_i = E(Z_i) - L\sqrt{Var(Z_i)}, UCL_i = E(Z_i) + L\sqrt{Var(Z_i)}$$

محاسبه می‌شوند. که در آن  $E(Z_i)$  و  $Var(Z_i)$  به ترتیب امید ریاضی و واریانس آماره در زمان  $i$  و  $L$  ضریب ثابت باشد. زی و همکاران [۶] نمودار کنترل EWMA را برای کنترل فرایندهای با کیفیت بالا پیشنهاد نمودند. ایشان این نمودار را برای مشاهدات توزیع هندسی که با استفاده از تابع تبدیل  $X^{0.25}$  به مشاهدات توزیع نرمال تبدیل شده اند ترسیم نمود. کوسنبری [۱۲] استفاده از نمودار EWMA را برای مشاهدات تبدیل شده توسط تابع تبدیل  $Q$  پیشنهاد نمود.

برور و همکاران [۱۳] مقاومت<sup>۲</sup> نمودار کنترل EWMA را در برابر نقض فرض نرمال بودن مشاهدات بررسی نمودند و ایشان نشان دادند که با انتخاب مناسب پارامترهای نمودار کنترل EWMA می‌توان حتی برای توزیعهای چوله (توزیع نمایی) به ARL موردنظر نمودارهای کنترل شوهرت دست یافت. بنابراین با توجه به چولگی توزیع هندسی می‌توان با انتخاب مناسب مقادیر  $L, \lambda$  نمودار کنترل EWMA با ARL دلخواه را طراحی نمود. در این صورت برای این نمودار  $Z_0 = 1/p_0$  و حدود کنترل به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$UCL_i = \frac{1}{p_0} + L \frac{1}{p_0} \left( \frac{1}{p_0} - 1 \right) \sqrt{\left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

$$CL = \frac{1}{p_0}$$

$$LCL_i = \frac{1}{p_0} - L \frac{1}{p_0} \left( \frac{1}{p_0} - 1 \right) \sqrt{\left( \frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

نیشنا [۱۴] یک برآوردکننده ذاتی نقطه تغییر را در نمودارهای کنترل EWMA معرفی نمود. وی آخرین مشاهده ای که قبل از

در فرایندهای با کیفیت بالا به علت تعداد بسیار زیاد حالت‌های ماتریس انتقال و پیچیدگی محاسبات کاربرد ندارد. رینولدز و استومبوس [۸] نمودار کنترل CUSUM را برای توزیع برنولی توسعه داده و برای محاسبه مقادیر ARL این نمودار دو روش دقیق زنجیره مارکوف و دستگاه معادلات و یک روش تقریبی انتشار تصحیح شده<sup>۱</sup> (CD) را پیشنهاد دادند. ایشان همچنین خاطر نشان نمودند که نمودار کنترل CUSUM برنولی از سمت بالا با مقدار اولیه، با یک نمودار کنترل CUSUM هندسی از سمت بالا بدون مقدار اولیه، معادل است. چنگ و گن [۹] استراتژیهای مناسب در به کارگیری نمودار CUSUM در فرایندهای با کیفیت بالا را بررسی نمودند.

به منظور پایش یک فرایند با کیفیت بالا توسط نمودار CUSUM هندسی، همزمان از دو نمودار کنترل CUSUM بالا و پایین استفاده می‌شود.

آماره مورد استفاده در نمودار کنترل سمت بالا در زمان  $i$  که بهبود کیفیت فرایند را نشان می‌دهد از رابطه  $H_i = \max\{0, H_{i-1} + k_H - X_i\}$  و آماره مورد استفاده در نمودار کنترل سمت پایین در زمان  $i$  که افت کیفیت فرایند را نشان می‌دهد از رابطه  $L_i = \min\{0, L_{i-1} + k_L - X_i\}$  به دست می‌آید. اگر  $H_i \geq h_H$  یا  $L_i \leq -h_L$  نمودار اعلام هشدار می‌نماید.

مقادیر آغازین به صورت  $H_0 = u, 0 \leq u < h_H$  و  $L_0 = v, -h_L < v \leq 0$  همچنین مقادیر  $k_H, k_L$  تعریف می‌شود. براساس رویکرد آزمونهای نسبت احتمال متوالی پی‌درپی<sup>۲</sup> (SPRT)، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\hat{t}_{CUSUM} = \max\{i : H_i = 0\},$$

$$\hat{t}_{CUSUM} = \max\{i : L_i = 0\}.$$

$$k = k_L = k_H = \frac{\log_e \{p_1(1-p_0)/p_0(1-p_1)\}}{\log_e \{(1-p_0)/(1-p_1)\}}$$

چنگ و گن [۹] نشان دادند که نمودار کنترل CUSUM برنولی از سمت بالا با پارامترهای  $k_{ber} = 1/c, h_{ber} = h, u_{ber} = (w+c-1)/c$  با نمودار کنترل CUSUM هندسی از سمت بالا با پارامترهای  $k_H = c, h_H = ch - c + 1, u = w$  معادل است.

پیچ [۱۰] یک برآوردکننده ذاتی نقطه تغییر را در نمودارهای کنترل CUSUM معرفی نمود. وی آخرین مشاهده ای که قبل از اعلام هشدار توسط نمودار مقدار صفر گرفته است را به عنوان برآورد ذاتی نقطه تغییر پیشنهاد نمود. این برآورد کننده در نمودار

<sup>1</sup> Corrected Diffusion

<sup>2</sup> Sequential Probability Ratio Tests

<sup>3</sup> Robustness

این رویه به تعداد  $N = 100,000$  دفعه برای هر  $p_1$  اجرا می‌شود. میانگین مقادیر برآوردهای حاصل از این  $100,000$  بار شبیه سازی  $(\hat{\tau}_{MLE}, \hat{\tau}_{CUSUM}, \hat{\tau}_{EWMA})$  به همراه مقادیر خطای استاندارد برآورد  $(se\hat{\tau}_{MLE}, se\hat{\tau}_{CUSUM}, se\hat{\tau}_{EWMA})$  محاسبه می‌شود. در هنگام دریافت هشدار قبل از دوره تغییر مورد نظر  $(T \leq \tau)$ ، این هشدار به عنوان خطای نوع اول در نظر گرفته شده و همان برخوردی که در واقعیت با یک هشدار اشتباهی انجام می‌شود، صورت می‌گیرد.

بدین صورت که هنگامیکه در واقعیت یک هشدار دریافت می‌شود، مهندسیین فرایند آن فرایند را تحت کنترل در نظر گرفته و پایش را از ابتدا شروع می‌نمایند. بنابراین در صورت دریافت هشدار اشتباهی در زمان  $T$ ، نمودار کنترل از مشاهده  $T+1$  مجدداً شروع به کار نموده و اطلاعات قبلی در نظر گرفته نمی‌شود.

اما نقطه تغییر برنامه ریزی شده نیز تغییر نمی‌کند. در این صورت بدیهیست در اجراییکه یک هشدار اشتباهی دریافت می‌شود، تعداد مشاهدات تحت کنترل کمتر از مقدار  $\tau$  خواهد بود. بعنوان مثال فرض کنید  $\tau = 100$  و در یکی از اجراهای شبیه سازی در دوره  $T = 60$  هشدار دریافت شده است. در این صورت نمودار کنترل برای دوره ۶۱ مجدداً شروع به کار نموده (اطلاعات مربوط به آمارها حذف می‌شود) و مشاهدات قبلی در نظر گرفته نمی‌شود. در این حالت تعداد مشاهدات تحت کنترل در صورت عدم دریافت هشدار اشتباهی دیگر، ۴۰ مشاهده خواهد بود.

#### ۴-۲. مقایسه برآورد کننده ها با استفاده از نمودار کنترل CUSUM

در این بخش عملکرد برآورد کننده های  $\hat{\tau}_{CUSUM}$  و  $\hat{\tau}_{MLE}$  با یکدیگر مقایسه می‌شود. نمودارهای مورد استفاده جهت پایش فرایند نمودارهای CUSUM بوده و این نمودارها به گونه‌ای طراحی می‌گردند که مقدار ARL تحت کنترل توام (از سمت بالا و پایین) با مقدار مرسوم ۳۷۰ تقریباً برابر شود. لازم به ذکر است که به منظور طراحی نمودارهای کنترل CUSUM از سمت بالا، در ابتدا با استفاده از روش انتشار تصحیح شده (CD) نمودار کنترل CUSUM برنولی از سمت بالا طراحی شده و سپس با استفاده از رابطه مطرح شده بین CUSUM برنولی و CUSUM هندسی، نمودار کنترل مناسب CUSUM هندسی طراحی شده است.

همچنین به علت ابعاد بسیار بزرگ ماتریس انتقال زنجیره مارکوف و پیچیدگی محاسبات، نمودارهای کنترل CUSUM هندسی از سمت پایین با استفاده از شبیه سازی طراحی شده است. جدول (۱) مشخصات نمودارهای CUSUM مورد استفاده در این مقایسه را نشان می‌دهد.

اعلام هشدار از سمت حد بالا (پایین) مقداری کمتر (بیشتر) از خط مرکز گرفته است، را به عنوان برآورد کننده پیشنهاد نمود. این برآورد کننده در نمودار EWMA هندسی معرفی شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\tau}_{EWMA} = \max \left\{ i : Z_i \leq \frac{1}{p_0} \right\} \quad \text{if } Z_i > UCL_i, \quad (10)$$

$$\hat{\tau}_{EWMA} = \max \left\{ i : Z_i \geq \frac{1}{p_0} \right\} \quad \text{if } Z_i < LCL_i.$$

در قسمت بعدی، عملکرد  $\hat{\tau}_{MLE}$ ،  $\hat{\tau}_{EWMA}$  در تشخیص دوره تغییر در حالتیکه نمودار کنترل EWMA هندسی اعلام هشدار می‌نماید، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

#### ۴. بررسی عملکرد و مقایسه برآورد کننده های دوره تغییر

در این بخش با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو به بررسی عملکرد و مقایسه برآورد کننده های دوره تغییر MLE ( $\hat{\tau}_{MLE}$ )، CUSUM ( $\hat{\tau}_{CUSUM}$ ) و EWMA ( $\hat{\tau}_{EWMA}$ ) پرداخته می‌شود. در تمامی مراحل انجام کار فرض بر آن است که یک دوره تغییر وجود داشته و تغییر به صورت تغییر سطح ماندگار است. در مقایسه بین  $\hat{\tau}_{MLE}$  و  $\hat{\tau}_{CUSUM}$  از نمودار کنترل CUSUM و در مقایسه بین  $\hat{\tau}_{MLE}$  و  $\hat{\tau}_{EWMA}$  از نمودار کنترل EWMA استفاده می‌شود.

از آنجاییکه مشاهدات هندسی مانند مشاهدات نرمال قابل استاندارد شدن نیستند، برای مقادیر مختلف  $0/0005$  و  $0/0001$ ،  $p_0 = 0/0005$  شبیه سازی و مقایسه صورت گرفته است.

#### ۴-۱. رویه شبیه سازی و مقابله با خطای نوع اول

رویه شبیه سازی طوری اجرا می‌گردد که تغییر در دوره  $100 = \tau$  به وجود آید. در ابتدا مشاهدات تصادفی  $100$ ،  $2$ ،  $1$  از یک توزیع هندسی با پارامتر  $p_0$  (فرایند تحت کنترل) تولید شده و از مشاهده  $101$  به بعد، مشاهدات تصادفی از یک فرایند خارج از کنترل با پارامتر  $p_1$  تولید می‌شود، این روند آنقدر ادامه می‌یابد که اولین هشدار از نمودار کنترل مورد بررسی دریافت شود.

سپس با استفاده از این مشاهدات تصادفی برآورد کننده‌های  $\hat{\tau}_{MLE}$  و  $\hat{\tau}_{CUSUM}$  در نمودار کنترل CUSUM و برآورد کننده‌های  $\hat{\tau}_{MLE}$  و  $\hat{\tau}_{EWMA}$  در نمودار کنترل EWMA محاسبه می‌گردد.

جدول ۱. مشخصات نمودارهای CUSUM مورد استفاده در مقایسه برآورد کننده‌ها

$p_0$	CUSUM Type	$p_1$	$u$	$k_H$	$h_H$
0.00005	Lower-side	0.00003	0	25541	$1.8940 \times 10^5$
0.00005	Upper-side	0.00007	-16822	16823	$1.7506 \times 10^5$
0.0001	Lower-side	0.00006	0	12770	$0.9510 \times 10^5$
0.0001	Upper-side	0.0003	-5491	5492	$0.2523 \times 10^5$
0.0005	Lower-side	0.0003	0	2554	$0.1900 \times 10^5$
0.0005	Upper-side	0.0007	-1681	1682	$0.1749 \times 10^5$

و  $\hat{E}[T]$  که به عنوان متوسط تعداد دوره سپری شده تا اعلام یک هشدار صحیح از نمودار است، به ازای مقادیر مختلف  $p_1$ ، آرایه شده است.  $\hat{E}[T]$  نیز از مقدار شبیه سازی به دست آمده است و به صورت  $ARL + \tau$  محاسبه می‌شود.

در ابتدا شبیه سازی و مقایسه دو برآورد کننده  $\hat{t}_{MLE}$  و  $\hat{t}_{CUSUM}$  در حالتی صورت گرفته که مقدار تحت کنترل نسبت اقلام معیوب  $p_0 = 0.00005$  می‌باشد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در جدول (۲) نمایش داده شده است.

در این جدول مقادیر  $\bar{t}_{CUSUM}$ ،  $se\bar{t}_{CUSUM}$ ،  $\bar{t}_{MLE}$ ،  $se\bar{t}_{MLE}$

جدول ۲. مقادیر متوسط و خطای استاندارد برآورد کننده‌ها و  $\hat{E}[T]$  ( $p_0 = 0.00005$ )

(PPM) $p_1$	$\hat{E}[T]$	$\bar{t}_{MLE}$	$se\bar{t}_{MLE}$	$\bar{t}_{CUSUM}$	$se\bar{t}_{CUSUM}$
100	103.54	99.83	0.015	96.82	0.026
150	105.54	100.10	0.020	97.33	0.026
200	108.47	100.70	0.028	98.09	0.028
250	113.18	102.40	0.038	99.82	0.032
<b>300</b>	121.48	106.25	0.058	104.45	0.048
350	139.25	116.66	0.100	118.71	0.099
400	185.32	149.42	0.217	164.04	0.249
450	310.51	270.33	0.606	290.25	0.656
550	314.30	265.69	0.614	266.97	0.640
600	210.59	162.35	0.277	157.51	0.290
650	168.26	128.15	0.161	116.33	0.151
<b>700</b>	148.84	114.30	0.111	100.81	0.095
750	138.29	107.50	0.085	94.53	0.072
800	132.01	103.94	0.070	91.97	0.062
850	127.86	101.77	0.060	90.55	0.058
900	124.86	100.40	0.052	89.81	0.056
950	122.62	99.52	0.047	89.21	0.055
1000	121.05	99.10	0.043	89.10	0.055

CUSUM فاصله می‌گیرد عملکرد  $\hat{t}_{MLE}$  بهتر است. مقدار مجموع مربعات خطای برآورد به ازای مقادیر مختلف  $p_1$  برای  $\hat{t}_{MLE}$  و  $\hat{t}_{CUSUM}$  به ترتیب ۶۴۱۹۰ و ۷۲۶۶۲ است. همچنین مقدار  $se\bar{t}_{MLE}$  و  $se\bar{t}_{CUSUM}$  تقریباً برابر بوده و در بیشترین حالت ۰/۶۶ می‌باشد.

همانگونه که از نتایج نیز مشخص است،  $\hat{t}_{CUSUM}$  به ازای تغییراتی که در نزدیکی مقدار نسبت‌های اقلام معیوبی است که نمودار CUSUM به ازای آن نسبتاً طراحی شده است (۰/۰۰۰۷)، عملکرد نسبتاً بهتری را دارد، اما در سایر تغییرات، به خصوص زمانی که تغییرات از مقدار طراحی شده

نمونه‌زمانیکه نسبت اقلام معیوب فرایند به مقدار  $0.00095$  مختلف  $p_1$  می‌توان نتیجه گرفت که  $\hat{\tau}_{MLE}$  عملکرد بهتری نسبت به  $\hat{\tau}_{CUSUM}$  دارا می‌باشد. شبیه‌سازی و مقایسه عملکرد این دو برآورد کننده به ازای سایر مقادیر تحت کنترل نسبت اقلام معیوب  $p_0 = 0.00005, 0.0001$  نیز موید نتایج حاصل از حالت قبل می‌باشد. به منظور بررسی میزان دقت دو برآورد کننده، با استفاده از نتایج شبیه‌سازی متوسط احتمال مشاهده شده هر برآورد کننده در محدوده‌های مشخص حول دوره تغییر واقعی محاسبه شده است. جدول (۳) دقت هر برآورد کننده را به ازای  $p_0 = 0.00005$  و مقادیر مختلف  $p_1$  نشان می‌دهد. به عنوان

نمونه‌زمانیکه نسبت اقلام معیوب فرایند به مقدار  $0.00095$   $p_1 = 0.0001$  تغییر می‌کند، احتمال اینکه  $\hat{\tau}_{MLE}$  در فاصله ۱۰ دوره ای مقدار واقعی باشد،  $0.725$  و احتمال اینکه  $\hat{\tau}_{CUSUM}$  در فاصله ۱۰ دوره ای مقدار واقعی باشد،  $0.644$  است. دقت  $\hat{\tau}_{CUSUM}$  به جز در محدوده مقادیر  $p_1$  که نمودار CUSUM با ازای این مقادیر طراحی شده است، کمتر از دقت  $\hat{\tau}_{MLE}$  است. شبیه‌سازی و مقایسه دقت این دو برآورد کننده به ازای سایر مقادیر تحت کنترل نسبت اقلام معیوب  $p_0 = 0.00005, 0.0001$  موید نتایج حاصل از حالت قبل می‌باشد.

جدول ۳. دقت برآورد شده  $\hat{\tau}_{MLE}$  و  $\hat{\tau}_{CUSUM}$  ( $p_0 = 0.00005$ )

	$p_1$ (PPM)																	
	100	150	200	250	300	350	400	450	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) = 0$	0.459	0.326	0.224	0.146	0.087	0.046	0.019	0.006	0.005	0.012	0.025	0.038	0.053	0.071	0.090	0.104	0.124	0.137
	0.100	0.094	0.081	0.067	0.049	0.029	0.013	0.005	0.006	0.015	0.027	0.040	0.051	0.060	0.068	0.073	0.076	0.082
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 1$	0.704	0.555	0.414	0.293	0.188	0.108	0.049	0.017	0.015	0.035	0.064	0.095	0.128	0.164	0.199	0.230	0.261	0.288
	0.480	0.417	0.344	0.265	0.186	0.104	0.043	0.015	0.017	0.044	0.084	0.125	0.161	0.190	0.214	0.233	0.247	0.263
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 2$	0.818	0.685	0.540	0.398	0.267	0.159	0.076	0.027	0.025	0.055	0.098	0.142	0.190	0.237	0.283	0.322	0.362	0.393
	0.626	0.575	0.497	0.400	0.286	0.166	0.069	0.024	0.028	0.070	0.127	0.186	0.233	0.269	0.300	0.320	0.333	0.350
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 3$	0.881	0.770	0.630	0.480	0.332	0.204	0.099	0.036	0.034	0.074	0.128	0.184	0.242	0.298	0.350	0.395	0.439	0.475
	0.700	0.667	0.599	0.500	0.367	0.218	0.094	0.033	0.039	0.092	0.166	0.238	0.294	0.334	0.367	0.385	0.399	0.414
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 4$	0.917	0.826	0.698	0.546	0.388	0.242	0.121	0.044	0.042	0.092	0.155	0.221	0.288	0.350	0.407	0.454	0.502	0.540
	0.746	0.726	0.672	0.576	0.434	0.264	0.115	0.041	0.049	0.114	0.201	0.284	0.345	0.388	0.421	0.438	0.451	0.465
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 5$	0.939	0.866	0.751	0.602	0.436	0.277	0.140	0.052	0.051	0.109	0.180	0.255	0.329	0.395	0.454	0.506	0.555	0.594
	0.779	0.768	0.725	0.637	0.491	0.304	0.136	0.049	0.058	0.133	0.232	0.323	0.389	0.434	0.466	0.484	0.497	0.507
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 10$	0.977	0.953	0.893	0.779	0.610	0.417	0.224	0.090	0.090	0.182	0.289	0.389	0.481	0.559	0.624	0.681	0.725	0.762
	0.874	0.878	0.866	0.815	0.681	0.454	0.217	0.085	0.103	0.220	0.365	0.480	0.555	0.600	0.628	0.639	0.644	0.652
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 15$	0.987	0.977	0.948	0.871	0.723	0.519	0.293	0.123	0.125	0.244	0.372	0.487	0.588	0.668	0.731	0.783	0.822	0.850
	0.924	0.928	0.925	0.897	0.788	0.558	0.282	0.115	0.141	0.292	0.466	0.591	0.666	0.705	0.726	0.733	0.735	0.739
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 20$	0.992	0.986	0.971	0.923	0.801	0.601	0.354	0.153	0.157	0.297	0.443	0.566	0.670	0.747	0.805	0.851	0.883	0.905
	0.953	0.956	0.954	0.940	0.856	0.635	0.335	0.143	0.177	0.352	0.545	0.673	0.745	0.779	0.794	0.799	0.797	0.801
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 25$	0.995	0.990	0.981	0.952	0.856	0.667	0.407	0.181	0.186	0.345	0.504	0.632	0.735	0.808	0.860	0.897	0.922	0.939
	0.971	0.972	0.971	0.965	0.901	0.695	0.382	0.168	0.209	0.406	0.610	0.738	0.804	0.833	0.843	0.846	0.844	0.847
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 30$	0.996	0.993	0.986	0.969	0.896	0.723	0.456	0.207	0.214	0.388	0.556	0.690	0.787	0.855	0.900	0.930	0.948	0.960
	0.982	0.982	0.982	0.979	0.931	0.745	0.424	0.192	0.238	0.451	0.662	0.788	0.848	0.872	0.880	0.882	0.879	0.882
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 35$	0.997	0.994	0.989	0.979	0.925	0.769	0.498	0.231	0.238	0.428	0.604	0.738	0.831	0.892	0.928	0.952	0.964	0.972
	0.989	0.989	0.988	0.987	0.952	0.785	0.462	0.214	0.265	0.491	0.706	0.828	0.883	0.903	0.907	0.909	0.907	0.909
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 40$	0.998	0.996	0.992	0.985	0.945	0.806	0.538	0.254	0.262	0.465	0.646	0.779	0.866	0.919	0.948	0.966	0.975	0.980
	0.993	0.993	0.993	0.992	0.967	0.817	0.498	0.235	0.289	0.527	0.744	0.861	0.909	0.925	0.928	0.929	0.929	0.929

نشان می‌دهد. در ابتدا شبیه‌سازی و مقایسه دو برآورد کننده  $\hat{\tau}_{MLE}$  و  $\hat{\tau}_{EWMA}$  در حالتی صورت گرفته است که  $\lambda = 0.05$  و  $p_0 = 0.00005$  می‌باشد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در جدول (۵) نمایش داده شده است. در جدول (۵) مقادیر  $\bar{\tau}_{MLE}$ ،  $\bar{\tau}_{EWMA}$ ،  $se\bar{\tau}_{MLE}$  و  $se\bar{\tau}_{EWMA}$  که به عنوان متوسط تعداد دوره سپری شده تا اعلام یک هشدار صحیح از نمودار است، به ازای مقادیر مختلف  $p_1$ ، ارایه شده است.  $E[\hat{T}]$  نیز از مقدار شبیه‌سازی به دست آمده است و به صورت  $ARL + \tau$  محاسبه می‌شود.

### ۴-۳. مقایسه برآورد کننده‌ها با استفاده از نمودار کنترل

#### EWMA

در این بخش عملکرد برآورد کننده‌های  $\hat{\tau}_{MLE}$  و  $\hat{\tau}_{EWMA}$  با یکدیگر مقایسه می‌شود. نمودارهای مورد استفاده جهت پایش فرایند نمودارهای EWMA بوده و این نمودارها به گونه‌ای طراحی می‌گردند که مقدار ARL تحت کنترلشان با مقدار مرسوم ۳۷۰ تقریباً برابر شود.

لازم به ذکر است که به منظور طراحی نمودارهای کنترل EWMA از شبیه‌سازی با  $100,000$  بار تکرار استفاده شده است. جدول (۴) مشخصات نمودارهای EWMA مورد استفاده در این مقایسه را

## جدول ۴. مشخصات نمودارهای EWMA مورد استفاده در

## مقایسه برآورد کنندگان

$p_0$	$\lambda$	$L$
0.00005	0.05	2.5427
0.00005	0.01	1.9905
0.0001	0.05	2.5426
0.0001	0.01	1.9885
0.0005	0.05	2.5427
0.0005	0.01	1.9905

همانگونه که از جدول (۵) مشخص است،  $\hat{t}_{MLE}$  به غیر از محدوده‌ای از کاهش نسبت اقلام معیوب (بین ۲۵۰ الی ۴۵۰ PPM)، و یک مورد در افزایش نسبت اقلام معیوب (۷۵۰ PPM)، عملکرد مناسبتری نسبت به  $\hat{t}_{EWMA}$  دارد. مقدار مجموع مربعات خطای برآورد به ازای مقادیر مختلف  $p_1$  برای  $\hat{t}_{MLE}$  و  $\hat{t}_{EWMA}$  به ترتیب ۱۳۰۵۳۴ و ۴۲۰۸۶۲ است.

مقدار بسیار بد برآورد در  $p_1 = ۰/۰۰۰۵۵$  به علت عملکرد نامناسب نمودار EWMA در تشخیص تغییر و بالتبع آن مقدار نامناسب  $\hat{E}[T]$  است. همچنین مقدار  $se\hat{t}_{MLE}$  در اکثر موارد کمتر از  $se\hat{t}_{CUSUM}$  بوده و این مقدار برای هر دو برآورد کننده در بیشترین حالت ۱/۹۶ می باشد. در مجموع با توجه مجموع مربعات خطای برآورد به ازای مقادیر مختلف  $p_1$  می‌توان نتیجه گرفت که عملکرد بهتری نسبت به  $\hat{t}_{EWMA}$  دارا می‌باشد.

جدول (۶) نتایج حاصل از شبیه‌سازی در حالتی که  $p_0 = 0.0005, \lambda = 0.01$  است را نشان می‌دهد. مقادیر  $\hat{E}[T]$  بیانگر این موضوع است که نمودار کنترل EWMA با مقدار کم  $\lambda$  عملکرد به مراتب بهتری (مقادیر کوچکتر ARL) دارد. همچنین در این حالت صحت و دقت برآورد کننده MLE بسیار بهتر است. همچنین با مقایسه  $\hat{t}_{EWMA}$  و  $\hat{t}_{MLE}$  می‌توان به این نکته پی‌برد که  $\hat{t}_{EWMA}$  در تشخیص دوره تغییر هنگامیکه تغییرات کم هستند و  $\hat{t}_{MLE}$  در تشخیص دوره تغییر هنگامیکه تغییرات زیاد هستند، عملکرد بهتری را دارا می‌باشند. شبیه سازی و مقایسه عملکرد این دو برآورد کننده به ازای سایر مقادیر تحت کنترل نسبت اقلام معیوب  $p_0 = ۰/۰۰۰۰۵/۰۰۰۱$ ، موید نتایج حاصل از حالت قبل می باشد. به منظور بررسی میزان دقت دو برآورد کننده، با استفاده از شبیه‌سازی متوسط احتمال مشاهده شده هر برآورد کننده در محدوده‌های مشخص حول دوره تغییر واقعی محاسبه شده است. جدول (۷) دقت هر برآورد کننده را به ازای نمونه زمانی که نسبت اقلام معیوب فرایند به مقدار  $p_1 = 0.0002$  تغییر می‌کند، احتمال اینکه  $\hat{t}_{MLE}$  در فاصله ۵ دوره‌ای مقدار واقعی باشد،  $۰/۷۵۶$  و احتمال اینکه  $\hat{t}_{EWMA}$  در فاصله ۵ دوره ای مقدار واقعی باشد،  $۰/۶۵۱$  است. نتایج بیانگر این موضوع است که در مجموع دقت  $\hat{t}_{MLE}$  بیشتر از دقت  $\hat{t}_{EWMA}$  است.

جدول ۵. مقادیر متوسط و خطای استاندارد برآورد کننده ها و  $\hat{E}[T]$  ( $p_0 = 0.0005, \lambda = 0.05$ ).

$P_1$ (PPM)	$\hat{E}[T]$	$\hat{t}_{MLE}$	$se\hat{t}_{MLE}$	$\hat{t}_{EWMA}$	$se\hat{t}_{EWMA}$
100	103.46	99.79	0.015	96.07	0.036
150	105.33	100.08	0.019	96.57	0.037
200	108.00	100.81	0.025	97.38	0.038
250	112.08	102.61	0.034	98.83	0.040
300	118.64	106.54	0.050	101.86	0.048
350	131.32	116.09	0.082	110.24	0.075
400	160.73	142.23	0.166	136.91	0.164
450	243.43	224.32	0.426	220.79	0.429
550	726.53	421.24	1.172	681.79	1.966
600	419.36	190.67	0.445	345.01	0.932
650	259.80	134.97	0.225	175.41	0.395
700	196.82	116.25	0.143	118.18	0.180
750	167.89	107.97	0.104	101.13	0.101
800	152.08	103.99	0.082	95.61	0.074
850	142.81	101.53	0.069	93.67	0.067
900	136.64	100.10	0.060	92.73	0.064
950	132.28	99.13	0.054	92.09	0.063
1000	129.17	98.61	0.049	91.74	0.063

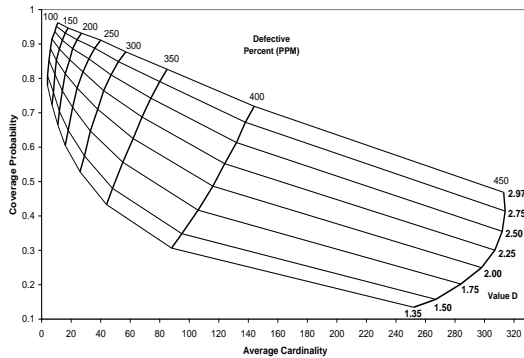
جدول ۶. مقادیر متوسط و خطای استاندارد برآوردکننده ها و  $\hat{E}[T]$  ( $p_0 = 0.0005, \lambda = 0.01$ ).

$p_1$ (PPM)	$\hat{E}[T]$	$\hat{\tau}_{MLE}$	$se \hat{\tau}_{MLE}$	$\hat{\tau}_{EWMA}$	$se \hat{\tau}_{EWMA}$
100	104.74	99.74	0.016	89.46	0.071
150	107.46	99.87	0.022	90.18	0.072
200	111.14	100.40	0.029	91.15	0.074
250	116.47	101.83	0.039	92.72	0.077
300	124.59	105.33	0.056	95.11	0.083
350	138.83	114.64	0.090	100.72	0.097
400	169.63	141.35	0.173	117.52	0.154
450	259.08	228.95	0.448	194.01	0.431
550	305.50	258.22	0.562	202.84	0.535
600	206.69	159.84	0.253	115.72	0.214
650	172.09	126.73	0.156	96.22	0.138
700	155.93	112.95	0.112	90.24	0.119
750	146.49	105.99	0.088	87.48	0.112
800	140.45	102.40	0.072	86.00	0.108
850	136.33	100.37	0.062	85.13	0.106
900	133.25	99.15	0.055	84.57	0.104
950	130.91	98.55	0.049	84.10	0.103
1000	129.14	98.09	0.045	84.12	0.102

جدول ۷. دقت برآورد شده  $\hat{\tau}_{MLE}$  و  $\hat{\tau}_{EWMA}$  ( $p_0 = 0.0005$ ).

	$p_1$ (PPM)																	
	100	150	200	250	300	350	400	450	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) = 0$	0.460 0.047	0.328 0.044	0.227 0.040	0.147 0.036	0.090 0.029	0.048 0.023	0.021 0.013	0.007 0.006	0.004 0.002	0.011 0.005	0.022 0.013	0.036 0.023	0.052 0.030	0.070 0.035	0.088 0.038	0.103 0.041	0.119 0.045	0.137 0.043
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 1$	0.705 0.383	0.557 0.299	0.420 0.233	0.296 0.179	0.195 0.131	0.111 0.086	0.053 0.047	0.020 0.019	0.010 0.006	0.030 0.015	0.058 0.040	0.088 0.070	0.123 0.094	0.160 0.110	0.193 0.121	0.225 0.130	0.256 0.139	0.285 0.141
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 2$	0.820 0.564	0.690 0.470	0.546 0.382	0.402 0.296	0.273 0.220	0.163 0.145	0.080 0.078	0.032 0.032	0.016 0.010	0.047 0.025	0.088 0.065	0.134 0.114	0.182 0.154	0.231 0.179	0.274 0.198	0.316 0.213	0.355 0.225	0.390 0.232
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 3$	0.882 0.661	0.773 0.585	0.636 0.497	0.486 0.396	0.339 0.300	0.209 0.201	0.106 0.107	0.042 0.044	0.023 0.014	0.063 0.036	0.115 0.089	0.172 0.155	0.232 0.210	0.290 0.243	0.341 0.271	0.387 0.288	0.432 0.304	0.470 0.317
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 4$	0.917 0.717	0.829 0.662	0.704 0.585	0.554 0.480	0.396 0.371	0.250 0.251	0.129 0.136	0.052 0.055	0.029 0.017	0.078 0.045	0.141 0.113	0.207 0.196	0.276 0.261	0.341 0.303	0.396 0.336	0.446 0.358	0.494 0.378	0.534 0.392
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 5$	0.939 0.751	0.870 0.714	0.756 0.651	0.610 0.552	0.445 0.434	0.287 0.299	0.150 0.162	0.062 0.067	0.034 0.021	0.092 0.055	0.163 0.136	0.238 0.234	0.313 0.310	0.384 0.359	0.443 0.396	0.495 0.422	0.545 0.442	0.587 0.457
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 10$	0.976 0.834	0.955 0.833	0.899 0.821	0.790 0.769	0.626 0.659	0.432 0.490	0.240 0.278	0.104 0.118	0.059 0.038	0.154 0.097	0.260 0.234	0.363 0.393	0.458 0.504	0.542 0.570	0.607 0.614	0.664 0.641	0.710 0.657	0.749 0.668
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 15$	0.986 0.884	0.978 0.885	0.953 0.884	0.882 0.864	0.745 0.789	0.541 0.620	0.315 0.369	0.141 0.161	0.083 0.054	0.204 0.133	0.336 0.309	0.455 0.504	0.557 0.628	0.644 0.696	0.710 0.730	0.761 0.749	0.802 0.756	0.836 0.760
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 20$	0.991 0.918	0.987 0.919	0.975 0.920	0.933 0.912	0.825 0.864	0.629 0.715	0.383 0.445	0.175 0.201	0.104 0.067	0.248 0.164	0.398 0.371	0.527 0.585	0.633 0.710	0.719 0.773	0.780 0.798	0.826 0.809	0.862 0.810	0.888 0.812
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 25$	0.994 0.942	0.991 0.942	0.984 0.943	0.961 0.940	0.881 0.910	0.700 0.781	0.442 0.507	0.209 0.236	0.123 0.080	0.287 0.190	0.452 0.420	0.587 0.644	0.693 0.768	0.775 0.823	0.832 0.843	0.872 0.850	0.901 0.849	0.921 0.850
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 30$	0.995 0.959	0.993 0.958	0.989 0.959	0.976 0.959	0.918 0.940	0.759 0.831	0.495 0.561	0.240 0.269	0.142 0.091	0.323 0.213	0.499 0.460	0.637 0.689	0.742 0.810	0.820 0.860	0.870 0.876	0.904 0.881	0.927 0.879	0.944 0.880
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 35$	0.997 0.971	0.995 0.970	0.992 0.971	0.985 0.972	0.945 0.960	0.806 0.869	0.543 0.606	0.269 0.298	0.159 0.101	0.357 0.233	0.540 0.494	0.681 0.727	0.782 0.843	0.854 0.887	0.899 0.902	0.928 0.904	0.946 0.902	0.958 0.903
$\hat{P}(\hat{\tau} - \tau) \leq 40$	0.998 0.980	0.996 0.979	0.994 0.980	0.990 0.981	0.963 0.973	0.843 0.897	0.588 0.647	0.297 0.326	0.175 0.110	0.387 0.252	0.577 0.523	0.719 0.757	0.818 0.869	0.883 0.909	0.922 0.921	0.945 0.923	0.959 0.921	0.968 0.922

سطح قابل قبولی از متوسط احتمال پوشش و متوسط تعداد اعضای مجموعه دست یافت، تعیین نمایند.

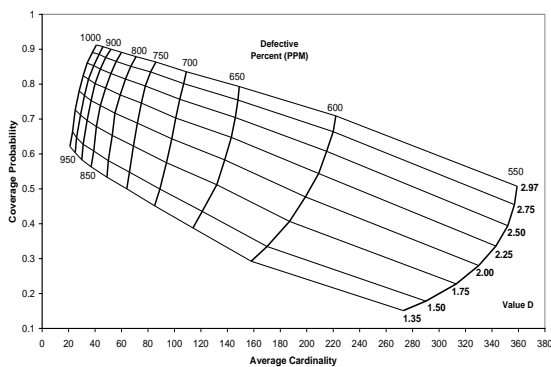


شکل ۱. متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد

اعضای مجموعه اطمینان به ازای مقادیر مختلف  $p_1 < p_0, D$

$$p_0 = 500, \tau = 100 \text{ (نمودار کنترل CUSUM)}$$

به عنوان مثال فرض کنید کاربری تمایل دارد که مجموعه اطمینان پیرو تغییر در حالتی که  $p_1 = 0.0002$  دارای احتمال پوشش حداقل  $0.8$  و متوسط تعداد اعضای حداکثر  $20$  باشد. در اینصورت با توجه به شکل (۱)، مقدار  $D$  مورد نظر می‌بایست بین  $2.00$  و  $2.75$  انتخاب شود. هر مقدار خارج از این بازه منتج به متوسط احتمال پوشش کمتر یا متوسط تعداد اعضای بیشتر از مقدار مورد نظر می‌شود. نکته قابل توجه دیگر که در مقایسه دو شکل (۱) و (۲) نتیجه می‌شود این است که مقادیر احتمال پوشش و متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان به ازای تغییرات کاهشی نسبت اقلام معیوب بهتر از مقادیر متناظر به ازای تغییرات افزایشی نسبت اقلام معیوب است.



شکل ۲. متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد

اعضای مجموعه اطمینان به ازای مقادیر مختلف  $p_1 > p_0, D$

$$p_0 = 500, \tau = 100 \text{ (نمودار کنترل CUSUM)}$$

## ۵. مجموعه اطمینان براساس تابع احتمالی تغییر پله-ای ساده برای نسبت اقلام معیوب در فرآیندهای

### با کیفیت بالا

برآورد کننده‌هایی که تاکنون مطرح گردید، برآوردکننده های نقطه‌ای بوده و یک دوره را به عنوان دوره تغییر معرفی می‌نمود. وجود یک مجموعه اطمینان<sup>۱</sup> که در آن پنجره‌ای از دوره‌های تغییر ممکن همراه با دوره تغییر واقعی با سطح اطمینان مشخص وجود دارد، می‌تواند برای کاربران بسیار مفید باشد. کاربران با در دسترس داشتن چنین مجموعه‌ای در حقیقت دوره‌های کاندید برای دوره تغییر را در اختیار داشته و با جستجوی این مجموعه می‌توانند قدرت و سرعت شناسایی انحراف با دلیل را افزایش دهند. باکس و کاکس [۱۵] روشی را برای ایجاد مجموعه‌های اطمینان برای برآوردهای درست‌نمایی بیشینه بر اساس تابع درست‌نمایی پیشنهاد می‌کنند. بر اساس روش پیشنهادی ایشان مجموعه اطمینان به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$CS = \{t : \log_e L(t) > \log_e L(\hat{t}) - D\} \quad (11)$$

که در آن  $D$  یک مقدار ثابت مثبت بوده و  $\log_e L(\hat{t})$  مقدار بیشینه لگاریتم تابع درست‌نمایی به ازای تمام دوره های تغییر ممکن  $\tau$  می‌باشد. در حقیقت دوره‌ای که اختلاف لگاریتم تابع درست‌نمایی آن از مقدار بیشینه لگاریتم تابع درست‌نمایی کمتر از  $D$  باشد، درون این مجموعه اطمینان قرار می‌گیرد. با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و مطابق فرایندی که در قسمتهای قبل مطرح گردید، مجموعه‌های اطمینان به ازای مقادیر مختلف  $D = 1.353, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50, 2.75, 2.97$  مقادیر ابتدایی و انتهایی  $D$  مقادیر پیشنهادی باکس و کاکس [۱۵] و سیگموند [۱۶] است. در هر مجموعه اطمینان دو آماره متوسط احتمال پوشش دوره تغییر توسط مجموعه اطمینان و متوسط تعداد اعضای مجموعه مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدیهی است که هر چه مقدار متوسط احتمال پوشش بیشتر و متوسط تعداد اعضای مجموعه کمتر باشد، مجموعه مورد نظر مجموعه مناسبتری است. شکل (۱) و (۲) مقدار متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان را به ترتیب برای کاهش و افزایش نسبت اقلام معیوب به ازای مقادیر مختلف  $D$  و  $\tau = 100$  نشان می‌دهد. همانگونه که از شکل (۲) نیز مشخص است، با افزایش میزان تغییر، همزمان متوسط احتمال پوشش افزایش و تعداد اعضای مجموعه اطمینان کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش مقدار  $D$ ، مقدار احتمال پوشش و متوسط اعداد مجموعه اطمینان افزایش می‌یابد. کاربران با استفاده از این اشکال می‌توانند مقدار مناسب  $D$  را که به ازای آن می‌توان به

<sup>۱</sup> Confidence Set

### ۶ نتیجه گیری

چنانچه مهندسان قادر باشند زمان تغییر در فرآیندها را تعیین کنند، براحتی پارامتر تغییر یافته در فرآیند را شناسایی و در مدت زمان کوتاهتری علل ریشه‌ای را مشخص می‌کنند که این امر بهبود کیفیت در فرآیند و محصولات را تسریع خواهد کرد. همچنین برآورد زمان تغییر، احتمال شناسایی نادرست پارامتر تغییر یافته را کاهش داده و پس از اعلام هشدار نقطه‌ای آغازین برای جستجوی زمان و علت واقعی تغییر را در اختیار مهندسان فرآیند قرار می‌دهد.

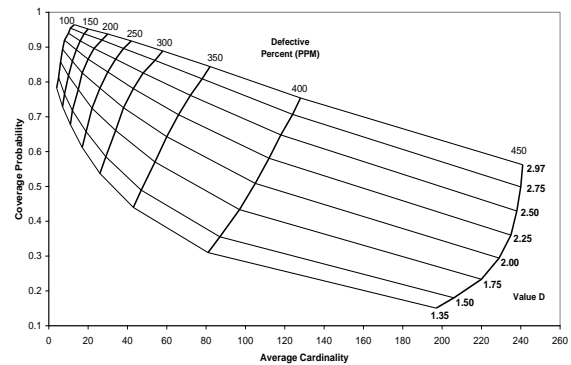
در این مقاله برآورد کننده درست‌نمایی بیشینه برای تخمین زمان تغییر در پارامتر نسبت اقلام معیوب فرآیند با کیفیت مورد بررسی قرار گرفته است. عملکرد این برآوردکننده با عملکرد برآوردکننده‌های ذاتی نمودارهای کنترل جمع تجمعی و میانگین موزون درست‌نمایی هندسی مقایسه شده است. نشان دادیم که برآوردکننده درست‌نمایی بیشینه به ازای مقادیر مختلف اندازه تغییر، برآوردی دقیق‌تر ارائه می‌دهد. از آنجایی که نمودارهای کنترل جمع تجمعی و میانگین موزون درست‌نمایی به ازای مقدار خاصی تعیین می‌شوند، در این نقاط برآوردکننده‌های ذاتی عملکرد بهتری دارند ولی بطور کلی برآورد کننده درست‌نمایی بیشینه در حالیکه به ازای مقدار خاصی طراحی نشده، برآورد بهتری داشته است.

در پایان، مجموعه اطمینان برای نقطه تغییر بررسی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان دادند که به ازای مقادیر مختلف  $D$  و  $p_1$ ، با افزایش احتمال پوشش، تعداد اعضای مجموعه اطمینان کاهش می‌یابد. کاربران با استفاده از این مجموعه می‌توانند مقدار مناسب  $D$  را که به ازای آن می‌توان به سطح قابل قبولی از متوسط احتمال پوشش و متوسط تعداد اعضای مجموعه دست یافت، تعیین نمایند.

### مراجع

- [1] Noorossana, R., Abdi, S., Saghaei, A., Paynabar, K., "Identifying the Time of a Change in High Yield Processes," Proceeding of 4<sup>th</sup> International Industrial Engineering Conference, Tehran, Iran, 2005.
- [2] Noorossana, R., Saghaei, A., Peynabar, K., Abdi, S., "Identifying the Period of a Step Change in High-Yield Processes", Quality and Reliability Engineering International, 2009; 25: pp. 875-883.
- [3] Pignatiello, J., Samuel, R., "Estimation of the Change Point of a Normal Mean in SPC Applications".

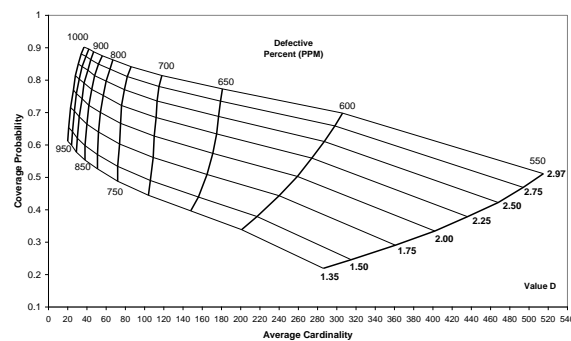
در ادامه با به کارگیری رابطه (۱۰) و شبیه‌سازی مونت کارلو و با استفاده از نمودار کنترل EWMA هندسی، مجموعه‌های اطمینان به‌ازای مقادیر مختلف  $D=1.35, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50, 2.75, 2.97$  تعیین می‌گردد. در هر مجموعه اطمینان دو آماره متوسط احتمال پوشش دوره تغییر توسط مجموعه اطمینان و متوسط تعداد اعضای مجموعه مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدیهی است که هر چه مقدار متوسط احتمال پوشش بیشتر و متوسط تعداد اعضای مجموعه کمتر باشد، مجموعه موردنظر مجموعه مناسبتری است.



شکل ۳. متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد

اعضای مجموعه اطمینان به ازای مقادیر مختلف  $D$ ,  $p_1 < p_0$ , (نمودار کنترل EWMA)  $p_0 = 500 \text{ PPM}, \tau = 100, \lambda = 0.05$

شکل (۳) و (۴) مقدار متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان را به ترتیب برای کاهش و افزایش نسبت اقلام معیوب به ازای مقادیر مختلف  $D$  و  $p_0 = 0.0005, \tau = 100$  نشان می‌دهد. رفتار نمودارها مشابه حالتی است که از نمودار CUSUM هشدار دریافت می‌شود. نکته قابل توجه دیگر که در مقایسه دو شکل (۳) و (۴) نتیجه می‌شود این است که مقادیر احتمال پوشش و متوسط تعداد اعضای مجموعه اطمینان به ازای تغییرات کاهشی نسبت اقلام معیوب بهتر از مقادیر متناظر به ازای تغییرات افزایشی نسبت اقلام معیوب است.



شکل ۴. متوسط احتمال پوشش در برابر متوسط تعداد

اعضای مجموعه اطمینان به ازای مقادیر مختلف  $D$ ,  $p_1 > p_0$ , (نمودار کنترل EWMA)  $p_0 = 500, \tau = 100, \lambda = 0.05$

Quality Technology and Quantitative Management, 2006; 3(3): pp. 325-344.

- [4] Perry, M.B., Pignatiello, J.J., JR., Simpson, R., "Estimating the Change Point of a Poisson Rate Parameter for SPC Applications," (under review).
- [5] Perry M.B., Pignatiello, J.J., JR., "Estimation of the Change Point of the Process Fraction Nonconforming in SPC Applications," International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, 2005; 12(2): pp. 95-110.
- [6] Xie, M., Goh, T.N., Kuralmani, V., *Statistical Models and Control Charts for High-Quality Processes*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 2002.
- [7] Brook, D., Evans, D.A., "An approach to the probability distribution of CUSUM run length." *Biometrika*, 1991; 59: 539-549
- [8] Reynolds, M.R., Jr. Stoumbos, Z.G.. "A CUSUM Chart for Monitoring a Proportion when Inspecting Continuously". *Journal of Quality Technology*. 1999; 31: 87-108
- [9] Chang, T.C., Gan F.F., "Charting Techniques for Monitoring a Random Shock Process," *Quality and Reliability Engineering International*, 1999; 15: pp. 295-301
- [10] Page, E.S. "Cumulative Sum Control Charts." *Technometrics* 1961; 3(1): 1-9.
- [11] Roberts, S.V., "Control Chart tests Based on Geometric Moving Averages", *Technometrics* 1959; 1: pp. 239-250
- [12] Quesenberry, C.P., "Geometric Q Charts for High Quality Process" *Journal of Quality Technology*, 1995; 27(4): pp. 333-343
- [13] Borrór, C.M., Montgomery, D.C., Runger, G.C., "Robustness of the EWMA Control Cchart to Non-Normality." *Journal of Quality Technology*, 1000;31(3): pp. 309-316.
- [14] Nishina, K., "A Comparison of Control Charts from the Veiwpoint of Change Point Estimation," *Quality and Reliability Engineering International*, 1992; 8: pp. 537-541
- [15] Box, G.E.P., Cox, D.R., "An Analysis of Transformations", *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1964; 26(2): pp. 211-252
- [16] Seigmond, D., "Boundary Crossing Probabilities and Statistical Applications", *The Analysis of Statistics*, 1986; 14(2): pp. 361-404.