فصل اول

مقدمه :

۱-۱ مروري بر حساب ديفرانسيل و انتگرال :

قضاياي زير در به دست آوردن روشهاي تخمين خطا ، داراي اهميت بنيادي هستند . اثبات اين قضايا وديگر نتايج بدون مرجع دراين بخش را مي توان درهركتاب حساب ديفرانسيل و انتگرال استاندارد يافت .

قضيه رول : فرض كنيد $f \in c[a,b]$ و f بر (a,b) مشتق پذير باشد . هرگاه $f(a)=f(b)=0$ دراين صورت عددي چون c در (a,b) وجود دارد به طوري كه $f'(c)=0$.

قضيه مقدار ميانگين : هرگاه $f \in c[a,b]$ و f بر (a,b) مشتق پذير باشد ، دراين صورت عددي چون c در (a,b) موجود است به طوري كه

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

قضيه مقدار ميانگين براي انتگرالها : هرگاه $f \in c[a,b]$ و g روي $[a,b]$ انتگرالپذير باشد ونيز g در $[a,b]$ تغيير علامت ندهد ،آنگاه عددي مانند c در (a,b) وجود دارد به طوري كه :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

تعميم قضيه رول : فرض كنيد $f \in c^n[a,b]$ باشد ،هرگاه $f(x)$ در$n+1$ نقطه متمايز $x_1, x_2, ...$ و x_n از $[a,b]$ صفر شود ، آنگاه نقطه اي مانند c در (a,b) وجود دارد بطوري كه $f^{(n)}(c)=0$.

قضیه تیلور : فرض کنید $f \in c^{n+1}[a,b]$ باشد و هم چنین $x_0 \in [a,b]$ ،آنگاه به ازاي هر $x \in [a,b]$ عددي مانند ξ_x بين x_0 و x وجود دارد به طوري که :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

که در آن

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

و

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi_x))$$

دراينجا $P_n(x)$ چند جمله اي تيلور درجه n ام حول x_0 و $R_n(x)$ جمله باقيمانده (يا خطاي برشي) وابسته به $P_n(x)$ ناميده مي شود . سري نامتناهي كه با حدگيري از $P_n(x)$ به ازاي $n \to \infty$ ، به دست مي آيد سري تيلور f حول x_0 ناميده مي شود . اغلب در حالتي كه $x_0=0$ باشد ، چندجمله اي تيلور ، چندجمله اي مك لورن ناميده مي شود .

قضیه تیلور با باقیمانده انتگرال : اگر $f \in c^{n+1}[a,b]$ ، آنگاه براي هرنقطه x و c در [a ,b] داريم :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x - c)^k + R_n(x)$$

که در آن

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, dt$$

قضیه تیلور دو متغیره : فرض کنيد $f(x, y)$ و همه مشتقات جزيي آن تا مرتبه n+1 ام در سراسر يك ناحيه مستطيلي D حول نقطه (a ,b) پيوسته باشند ، دراين صورت در سراسر ناحيه D داريم :

$$f(x,y)=f(a,b)+[(x-a)f_x+(y-b)f_y]_{(a,b)}+\frac{1}{2!}[(x-a)^2 f_{xx}+2(x-a)(y-b)f_{xy}+(y-b)^2 f_{yy}]_{(a,b)}$$
$$+\dots+\frac{1}{n!}[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}]^n . f(a,b)+\dots+\frac{1}{(n+1)!}[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}]^{n+1}$$
$$. f(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)) \quad ; \quad 0\le\theta\le 1$$

۱-۲ همگرايي

دنباله هاي همگرا : قبل از تعاريف كلي ابتدا فرض مي كنيم كه درصد يافتن ريشه يك معادله بغرنج يا مقدار عددي يك انتگرال معين پيچيده هستيم .درچنين حالتي يك برنامه كامپيوتري ممكن است يك دنباله از اعداد حقيقي $x_1, x_2, \dots$ را ايجاد كند كه به جواب درست نزديك شود . بنابراين مي نويسيم $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ اگر براي هر ε مثبت يك عدد حقيقي r يافت شود به طوري كه $|x_n - L|<\varepsilon$ هرگاه كه n>r (n يك عدد صحيح است).

مثال ۱-۱ : $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

زيرا $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$

هرگاه $n>\varepsilon^{-1}$

مثال **۱-۲** : بعنوان مثال معادله $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ را در نظر بگيريد كه بوسيله آن عدد غير گـــــــوياي e تعريف مي شود. اگر دنباله $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ را محاسبه كنيم، برخي از جملات عبارتند از :

$x_1 = 2.000000,\quad x_{10}=2.593742\quad ,x_{30}=2.674319,\quad x_{50}=2.691588,\quad x_{1000}=2.716924$

مثال فوق دنباله ايست كه به كندي همگراست . زيرا حد آن عبارتست از :

$e = 2.7182818\dots$

و در هزارمین جمله هنوز خطا حدود 0.001358 است .بنابراین :

$$\frac{|x_{n+1}-e|}{|e_n-e|} \to 1$$

مثال ۱-۳ : مثال دیگري از دنباله اي که کمي سریعتر به صفر همگرا مي شود عبارتست از :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x^2{}_n}{x_n^2+x_{n-1}^2}$$

با انتخاب دو مقدار اولیه $x_0=20.00$ و $x_1=15.00$ داریم :

$x_2 = 14.64$ $x_3 = 14.15$ $x_{33} = 0.54$ $x_{34} = 0.27$

درحالي که این مثال از مثال قبلي سریعتر همگرا مي شود اما هنوز هم همگرایي کند است .

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to 0$$

مثال ۱-٤ : مثال بعدي دنباله اي است که سریعاً همگرا مي شود .دنباله زیر را درنظر مي گیریم :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{x_n} \end{cases} \qquad n \ge 1$$

جملات این دنباله عبارتند از :

$x_1 = 2.000000$ $x_3 = 1.416667$

$x_2 = 1.500000$ $x_4 = 1.414216$

حد عبارتست از $\sqrt{2} = 1.414213562...$ و دنباله با سرعت زیادي به حد خود همگرا است .

$$\frac{|x_{n+1}-\sqrt{2}|}{|x_n-\sqrt{2}|^2} \le 0.36$$

چنین وضعیتي متناظر ، همگرایي مرتبه ۲ است ومثال دوم همگرایي فوق خطي مي باشد و مثال اول داراي خاصیت بدتر از همگرایي خطي است .

مرتبه هاي همگرايي :

تعريف ۱-۱ : فرض كنيد $\{x_n\}$ يك دنباله از اعداد حقيقي باشد كه به حد $\bar{x}$ ميل كند . گوئيم نرخ همگرايي حداقل **خطي** است اگر عدد ثابت c<1 و عدد صحيح N وجود داشته باشد به طوري كه :

$$|x_{n+1}-\bar{x}| \le c|x_n-\bar{x}| \quad , \quad (n \ge N)$$

تعريف : مي گوئيم كه نرخ همگرايي حداقل **فوق خطي** است اگر يك دنباله λ_n همگرا به صفر و يك عدد صحيح N وجود داشته باشند به طوري كه :

$$|x_{n+1}-\bar{x}| \le \lambda_n|x_n-\bar{x}| \quad , \quad (n \ge N)$$

تعريف ۱-۳ : مي گوييم نرخ يا سرعت همگرايي حداقل از **مرتبه ۲** است اگر يك ثابت c (نه لزوماً كمتر از يك) و يك عدد صحيح N وجود داشته باشند به طوري كه :

$$|x_{n+1}-\bar{x}| \le c|x_n-\bar{x}|^2 \quad , \quad (n \ge N)$$

حال بطوركلي مي توان مرتبه همگرايي را بصورت زير تعريف نمود

تعريف۱-٤ : مي گوئيم سرعت يا نرخ همگرايي حداقل از مرتبه p است اگر اعداد مثبت و ثابت p,c وعدد صحيح N وجود داشته باشد بطوريكه

$$|x_{n+1}-\bar{x}| \le c|x_n-\bar{x}|^p , \quad (n \ge N)$$

فصل دوم

۲-۱ حساب کامپیوتري

گرچه علم رياضي مدام درحال گسترش و توسعه روزافزون ميباشد ، معهذا مسائل زيادي در عرصه مختلف علوم وجود دارند كه به كمك آناليز رياضي وراه حلهاي متعارف قابل حل نيستند .بعنوان مثال حل دستگاههاي خطي وغيرخطي كه دارای تعداد مجهولات بسيار زياد باشند و عملاً در زندگي روزمره با آن سروكار داريم و بايستي حل نمائيم . عملاً به كمك نيروي انساني صرف غيرقابل حل هستند وبدون استفاده از كامپيوتر مقدور نيست .معادلات فرازنده نيز از جمله مسائلي هستند كه بايستي تقريب زده شوند .يا بعنوان مثال انتگرال گيري رادرنظر بگيريم . ميدانيم كه خيلي از انتگرالها هستند كه فرمول هاي متعارف براي حل آنها وجود ندارند و تنها راه ، حل تقريبي آنها است . توسعه روز افزون علم كامپيوتر و دخالت مستقيم و بيش از حد آن در زندگي روزمره ودر همه شاخه هاي علوم و فنون ، كاربرد روشهاي عددي را در حل مسائل را امكان پذير ساخته است .چرا كه بدون دخالت كامپيوتر بعلت حجم زياد عمليات وزمان حل آن عملاً انسان بدون كامپيوتر قادر نيست و عمرش براي حل پاره اي مسائل كافي نمي باشد .درصورتيكه با وجود كامپيوتر اين كار عملي است .

در روند محاسبات ما با كامپيوتر سر وكار داريم و ميدانيم كه كامپيوتر تنها چهار عمل اصلي جمع ، تفريق ،ضرب و تقسيم را انجام ميدهد .و در اين روند محاسباتي ، با اعداد حقيقي سروكار داريم .لذا بررسي اجمالي سيستم های نمايش اعداد لازم و ضروريست و قبل از اينكه به سيستم هاي نمايش عدد دوتايي ، ۸تايي ،۱٦ تايي و غيره بپردازيم لازم است ابتدا در مورد سيستم دهدهي كه

ما به آن عادت داريم اشاره اي بكنيم . دستگاه يا سيستم اعداد دهدهي داراي مبناي ۱۰ است وهر عدد را بعنوان مثال $(3678)_{10}$ را مي توان بصورت زير نشان داد .

$$(3678)_{10} = 3\times10^3 + 6\times10^2 + 7\times10^1 + 8\times10^0$$

يعني چند جمله اي از توانهاي ۱۰

يا $(0.6251)_{10}$ را به صورت چندجمله اي از 10^{-1} مي توان نوشت :

$$(0.6251)_{10} = 6\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 5\times10^{-3} + 1\times10^{-4}$$

$$(4987.6251)_{10} = 4\times10^3 + 9\times10^2 + 8\times10^1 + 7\times10^0 + 6\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 5\times10^{-3} + 1\times10^{-4}$$

بنابراين عدد بصورت كلي تر در سيستم دهدهي

$$(N)_{10} = (d_n d_{n-1} d_{n-2} ... d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} d_{-3} ... d_{-m})$$

رابصورت زير بيان مي كنيم .

$$(N)_{10} = d_n \times10^n + d_{n-1}\times10^{n-1} + ... + d_1\times10^1 + d_0\times10^0 + d_{-1}\times10^{-1} + ... + d_{-m}\times10^{-m}$$

همه d ها رقمهايي بين ۰ تا. ۹ هستند .

۲-۲ مبناي دودويي : يك مبناي بسيار مفيد براي كار با كامپيوتر ، مبناي دودويي يا سيستم اعداد پايه ۲ مي باشد . تنها علامت اساسي اين مبنا عبارتند از 1,0 . كه بيت (Bit) ناميده ميشوند. يكي از مزاياي اصلي طرز نمايش دودويي آنست كه به سهولت توسط بسياري از دستگاههاي فيزيكي كه مي توانند در دو حالت متفاوت از هم قرار گيرند نشان داده مي شوند .بعنوان مثال روي يك نوار كاغذي و يا كارت ، ۱ را مي توان بوسيله يك سوراخ و 0 را با نبودن سوراخ مشخص كرد .روي نوار مغناطيسي يا ساير مواد مغناطيس شونده ، ۱ را با نقطه مغناطيس شده و 0 را با نقطه مغناطيس نشده و يا مغناطيس شده با قطب مخالف ، مشخص كرد .دريك مدار الكتريكي ۱ را مي توان با يك پالس ولتاژ و 0 را با نبودن پالس يا پالس با علامت منفي مشخص نمود . مزيت ديگر طرز نمايش دودويي آنست كه بعلت وجود تنها دو علامت قوانين

بسيار كمي براي درنظرگرفتن همه تركيبات ممكن در جمع وضرب وجود دارد .مثلاً جدول ضرب اساسي تنها مركب از $0\times0=0$ ، $1\times0=0\times1=0$ ، $1\times1=1$ است .

يك عيب اساسي مبناي دودويي آنست كه براي نشان دادن عددهايي با مقادير نسبتاً متوسط ، تعداد بيتهاي زيادي لازم مي شود . بنابراين براي نمايش يك عدد دهدهي چهاررقمي ممكن است سيزده رقم مبناي دودويي لازم شود .درحالت كلي چون $\log_{10}2=0.30103$ يا $2^N=10^{0.30103N}$ به طوري كه عدد دودويي N بيتي تقريباً مساوي عدد دهدهي 0.3N رقمي است . عدد N در اين دستگاه را مي توان بصورت زير نوشت :

$$(N)_2=(b_nb_{n-1}...b_1b_0.b_{-1}b_{-2}...b_{-m})_2$$

كه درآن b_m تا b_n بيتهاي دوتايي هستند صفر يا يك هستند . عدد متناظر با اين عدد در دستگاه اعداد دهدهي بصورت زير محاسبه مي شود .

$$(N)_{10}=b_n\times2^n+b_{n-1}\times2^{n-1}+...b_1\times2^1+b_0\times2^0+b_{-1}\times2^{-1}+...+b_{-m}\times2^{-m}$$

۲-۳ تبديل اعداد در سيستم دوتايي به سيستم دهدهي

۲-٤ تبديل اعداد در سيستم دهدهي به دودويي

مثال۲ -1 : عدد اعشاري $(0.7)_{10}$ را بر مبناي دودويي تبديل كنيد :

K	b_k	N_{k+1}
0		0.7×2
1	1	0.4×2
2	0	0.8×2
3	1	0.6×2
4	1	0.2×2
5	0	0.4×2
6	0	0.8×2

7	1	0.6×2
8	1	0.2×2
9	0	0.4

$(0.7)_{10}=(0.101100110\ldots)_2$

اگر بعنوان مثال با ماشین حسابي كاركنيم كه هفت رقم اعشار را مي تواند در حافظه جاي دهد آنگاه داريم:

$$(0.7)_{10} \approx (0.1011001)_2 = 0.6953125$$

خطاي راند گردن عبارتست از :

$$(0.7-0.6953125)=0.0046875$$

۲-5 نمايش اعداد در كامپيوتر

ما عادتاً با سيستم اعداد دهدهي سروكار داريم و كامپيوترهاي ديجيتالي سيستم اعداد دهدهي را به سيستم اعدادي با مبنايي كه قابل درك و پذيرش كامپيوتر است تبديل و در حافظه نگه ميدارند (فرض مي كنيم مبنا β باشد) حافظه كامپيوتر ديجيتالي از سلولهاي جداگانه اي كه آنرا words مي ناميم تشكيل شده است . هر word تعداد ارقام كه بيت خوانده ميشوند بهمراه علامت مثبت يا منفي درخود نگه مي دارند تعداد ارقامي كه دريك word كامپيوتر ذخيره مي شوند را word length مي نامند و در كامپيوترهاي مختلف متفاوت هستند .اعداد به دو صورت در word كامپيوتر ذخيره مي شوند .

۱-مميز ثابت (Fixed-point)   ۲-مميز شناور (Floating-point)

در نمايش مميز ثابت تعداد ثابت n_1 محل اول براي اعداد صحيح و تعداد ثابت n_2 محل بعدي را براي قسمت اعشاري يا (binary) درنظر

مي گيرند بطوريكه اگر فرض كنيم كه گنجايش حافظه كامپيوتر t رقم باشد. $t=n_1+n_2$
در اين نمايش موقعيت مميز ثابت است . تعداد محدودي ابزار آلات رقمي كه اساساً شمارگرند از اين نمايش اعداد استفاده مي كنند .در اغلب كامپيوترها از نمايش اعداد در مميز شناور استفاده مي كنند كه اين نمايش به چهار پارامتر زير استوار است :
مبناي β و t رقم گنجايش حافظه وبرد e (m ,M)
هر عدد ناصفر x عموماً بفرم زير در كامپيوتر نمايش داده مي شود :

$$x=\sigma.(.d_1d_2...d_t).\beta^e \qquad (2.1)$$

بطوريكه $\sigma=\pm1$ كه براي نمايش علامت عدد است ، $0\le d_i\le\beta-1=\gamma$
و عدد نمايي e كه به نوع كامپيوتر وابسته است و داراي كمترين و بالاترين مقدار است $m\le e\le M$ و $(.d_1d_2...d_t)$ را مانتيس مي نامند و β را مبنا يا radix خوانده مي شود .
رابطه (2.1) چنانچه همواره $d_1\ne0$ $(1\le d_1\le\gamma)$ درنظر بگيريم شكل نرمال مميز شناور ناميده مي شود . $m\le e\le M$ را اندازه ممكن عدد x را مشخص مي كند .
اما همه اعداد حقيقي x را نمي توان آنطور كه واقعاً هستند بفرم مميز شناور بيان كرد .بنابراين بايستي به نزديكترين عدد تقريب زده شوند .پس فرض مي كنيم fl(x) نمايش تقريبي ماشين محاسب باشد كه به دو صورت ممكن chopping و rounding صورت مي گيرد .
فرض مي كنيم يك عدد حقيقي به فرم زير داريم

$$x=\sigma(.d_1d_2...d_td_{t+1}...)\beta^e \qquad (2.2)$$

چنانچه فرض كنيم كامپيوتري داراي t رقم گنجايش حافظه باشد با استفاده از عمل chopping داريم :

$$fl(x)_{chopping}=\sigma\,(.d_1d_2...d_t)\beta^e \qquad (2.3)$$

اما نمایش تقریبي آن بفرم rounding بصورت زير است :

$$fl_{rounding}(x) = \begin{cases} \sigma(.d_1 d_2 ... d_t)\beta^e & if \quad 0 \le d_{t+1} < \beta/2 \quad (2.4) \\ \sigma\left[(.d_1 d_2 ... d_t)_\beta + (0.00..01)_\beta\right]\beta^e & if \quad \beta/2 \le d_{t+1} < \beta \quad (2.5) \end{cases}$$

کوچکترين وبزرگترين عدد قابل نمايش در کامپيوتر

کوچکترين عدد قابل نمايش براي کامپيوتر در مبناي β با مميز شناور تا t رقم گنجايش حافظه را با x_L نمايش ميدهيم و عبارتست از :

$$x_L = \pm(0.100...0)\beta^m = \beta^{m-1} \qquad (2.6)$$

اعداد کوچکتر از عدد فوق موجب پاريز (under flow) و با صفر تقريب زده مي شوند .

بزرگترين عدد قابل نمايش در کامپيوتر را با x_U نمايش مي دهيم و عبارتست از :

$$x_U = \pm(0.\gamma\gamma...\gamma)\beta^M \cong \beta^M \quad , \quad \gamma = \beta - 1 \qquad (2.7)$$

اعداد بزرگتر از x_U از جهت قدرمطلق در کامپيوتر موجب سرريز (over flow) و باعث توقف ناگهاني ماشين مي شود .

۲-۸ منابع خطا

منابع خطا را مي توان به سه دسته تقسيم نمود :

۱-خطاي مدلسازي(يا خط ذاتي) Inherent Error

خطايي است که در بيان و تعبير مسائل موجود هستند .چرا که فرمولبندي مسائل علمي شامل داده هاي فيزيکي (طول ،جرم ،زمان و غيره) ميباشند وبطور قطع در اين داده ها خطاهاي مشاهداتي وآزمايشگاهي وجود دارد که غيرقابل اجتناب هستند . هم چنين براثر مفروضات ساده شده در فرمول بندي رياضي مسئله مي توانند حادث شوند .بدون شك عمل محاسباتي ازاين خطاها تأثير مي

پذيرند اما روند محاسباتي توانايي حذف آنرا ندارند . اما مي توان تأثير وانتشار اين نوع خطارا زير نظر داشت .

۲-خطاي برشي تقريب : **Truncation Error**

خطاي ناشي از تبديل يك مساله غيرقابل حل به مسئله تقريبي قابل حل مي باشد ، مانند گسسته سازي يك مسئله براي مثال با متناهي سازي يك بسط نامتناهي كه سرچشمه آن فن جانشاني سري تيلور محدود شده به جاي يك تابع مي باشد .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

كه $p_1 = 1 + x$, $p_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, ... چند جمله ايهاي قطع شده از بسط براي تقريب e^x به خصوص حول نقطه $x=0$ مي باشند .

تعريف ۲-۱ مرتبه خطاي برشي :

گوئيم $f(h)$ به وسيله $\bar{f}(h)$ باخطاي برشي از مرتبه n تقريب زده مي شود اگر براي مقادير كوچك $h>0$ ثابت $M>0$ موجود باشد بطوري كه $\left| f(h) - \bar{f}(h) \right| \le Mh^n$ وبا $O(h^n)$ نشان داده مي شود يعني :

$$f(h) = \bar{f}(h) + O(h^n) \qquad (2.8)$$

ملاحـــظه مي كنيد كه چون h خيلي كوچك است هرقدر n بزرگتر باشد جمله خطا سريعتر به صفر ميل مي كند .

۳-خطاي روند كردن اعداد **Round-off Error**

اغلب محاسبات با استفاده از ماشين صورت مي گيرند و چون داراي حافظه محدود هستند . اعداد به اجبار به صورت تقريبي درحافظه ذخيره مي شوند ، يعني خطاي روند كردن غيرقابل اجتناب است .همچنين همه اعداد حقيقي مانند $\pi, e, \sqrt{2}, 1/3$ وغيره بصورت اعشاري و متناهي

قابل نمایش نیستند پس اغلب اعداد x با عدد تقریبي $\bar{x}$ درنظر گرفته مي شوند که این امر باعث ایجاد خطا مي شوند .

۲-6 تحلیل خطا

در استفاده از روشهاي عددي آگاه بودن از این که اعداد همراه با خطاي روند کردن مي باشند اهمیت زیادي دارد ، چونکه دریك روش عددي به کمك ماشین محاسب هزاران ویا میلیونها عمل محاسباتي روي این اعداد تقریبي صورت مي گیرد .پس امکان دارد دقت نتایج حاصله به اندازه اي کم شود که بطورکامل بي معني شود .بنابراین جلوگیري از انباشتگي خطا یکي از مهارتهایي است که بایستي همیشه مدنظر قرار دهیم .

تعریف ۲-۲ خطاي مطلق و نسبي

فرض کنید $\bar{x}$ یك تقریب براي x باشد خطاي مطلق (e_x) وخطاي نسبي (r_x) بصورت زیر تعریف مي شوند

$$e_x = |x-\bar{x}| \quad , \qquad r_x = \frac{|x-\bar{x}|}{|x|} \qquad (2.9)$$

خطاي مطلق بطور ساده اختلاف بین مقدار واقعي و مقدار تقریبي مي باشد .ولي خطاي نسبي سنجش بهتري براي خطا مي باشد .اگر مقدار قدر مطلق e_x نسبت به قدر مطلق x کوچك باشد درایـنصورت حد نسبت e_x/x نزدیك به حد نسبت $e_x/\bar{x}$ مي باشد که در عمل بدلیل نامعلوم بودن x بیشتر مورد استفاده قرار مي گیرد .

کران خطاهاي مطلق و نسبي

عملاً خطاهاي (2.9) را نمي توان بطور دقیق مشخص کرد چون اغلب مقدار واقعي x در دسترس نمي باشد از آنجا که همواره بایستي بدانیم جواب تقریبي $\bar{x}$ با چه دقتي مقدار واقعي x را نشان مي

دهد .براي اين منظور مايل هستيم **حداقل اندازه حداكثر خطاي ممكن** را بدانيم. بطوريكه از اين به بعد از كرانهاي خطا به جاي خطاها صحبت مي كنيم .بنابراين اگر عدد x را با مميز شناور نمايش دهيم ، خطاي نسبي نمايش با استفاده از روشهاي Chopping و Rounding بصورت زير است :

$$\frac{|x-fl(x)_{chop}|}{|x|}=\frac{|(.d_1d_2...d_td_{t+1}...)\beta^e-(.d_1d_2...d_t)\beta^e|}{|(.d_1d_2...d_t...)\beta^e|}$$

$$=\frac{|(.d_{t+1}d_{t+2}...)\beta^{e-t}|}{|(.d_1d_2...)\beta^e|}=\left|\frac{.d_{t+1}d_{t+2}...}{.d_1d_2...}\right|\beta^{-t}\le\left|\frac{.\gamma\gamma\gamma...}{.10000}\right|\beta^{-t}$$

از آنجايي كه $d_1\neq 0$ حداقل مقدار مخرج كسر ٠/١ است ودر مبناي β برابر β^{-1} مي باشد . صورت كسر فوق نيز حداكثر مقدار ممكن آن يك است در نتيجه خواهيم داشت :

$$\frac{|x-fl(x)_{chop}|}{|x|}\le\frac{1}{\beta^{-1}}\times\beta^{-t}=\beta^{1-t} \qquad (2.10)$$

به روش مشابه كراني براي خطاي نسبي وقتي كه از روش Rounding در مميز شناور استفاده نمائيم بدست آوريم :

$$\frac{|x-fl(x)_{round}|}{|x|}\le\frac{1}{2}\beta^{1-t} \qquad (2.11)$$

تعريف ٢-٣ : مي گوئيم $x,\bar{x}$ را تا t رقم بامعني درست در مبناي β تقريب مي زند ، اگر t بزرگترين عدد صحيح نامنفي باشد كه به ازاي آن داريم : $\frac{|x-\bar{x}|}{|x|}\le\frac{1}{2}\beta^{1-t}$

مثال ٢-٥ : خطاي مطلق و نسبي را در حالتهاي زير بيابيم و تعداد ارقام بامعني درست در تقريبها را مشخص كنيد
$\bar{y}=0.000009, y=0.000012(b), \bar{x}=3.14, x=3.141592(a)$.

حل (a) : باتوجه به تعريف خطاي مطلق و نسبي (2.9) داريم :

$$e_x = |x-\bar{x}| = 3.141592 - 3.140000 = 0.001592$$

$$r_x = \frac{|e_x|}{|x|} = 0.001592/3.141592 = 0.000507 \approx \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

بنابراين $\bar{x}$ عدد x را تا سه رقم بامعني تقريب مي زند .

حل (b) : نظير فوق داريم : $|e_y| = |y-\bar{y}| = 0.000012 - 0.000009 = 0.000003$

$\bar{y}$ عدد y را بدون رقم بامعني درست تقريب مي زند

$$|r_y| = \frac{|ey|}{|y|} = \frac{0.000003}{0.000012} = 0.25 \Rightarrow |r_y| \le 10^{-0}/2$$

با مقايسه e_y,e_x نتيجه مي گيريم كه خطاي مطلق در تقريب y كمتر از x است اما با مقايسه r_y,r_x نتيجه مي گيريم كه خطاي نسبي در y بسيار بزرگتر از x است .

۲-7 انباشتگي و انتشار خطا

تا اينجا دريافتيم كه اغلب اعدادي كه در ماشين ذخيره مي شوند همراه با خطا هستند . اكنون به بررسي انتشار خطا در محاسبات متوالي و در روشهاي عددي مي پردازيم . چونكه هر روش عددي تركيبي از اعمال حسابي جمع ، تفريق ، ضرب و تقسيم مي باشد بنابراين ابتدا انباشتگي خطا در چهار عمل اصلي حسابي را كه متأثر از خطاي روند مي باشند بررسي كنيم . سپس تأثيراتي را كه اين خطاها بر روي محاسبه توابع دارند ، ارائه مي دهيم .

فرض كنيد $\bar{y},\bar{x}$ تقريب اعداد y ,x باشند و w $[+,-,\div,\times]$ يك عمل حسابي بين آنها باشد . مي خواهيم كران خطاي زير را تعيين كنيم .

$$E = (xwy) - (\bar{x}w\bar{y}) \qquad (2.12)$$

زماني که ماشين عمل W را انجام ميدهد دقيق نمي باشد بلکه باخطاي روند همراه است پس عمل ماشين متناظر را با W نمايش ميدهيم و با اضافه وکم کردن $\bar{x}w\bar{y}$ به رابطه (2.12) داريم .

$$E = [(xwy) - (\bar{x}w\bar{y})] + [(\bar{x}w\bar{y}) - (\bar{x}w\bar{y})] \qquad (2.13)$$

ملاحظه مي کنيد درماشين دو نوع خطا براي هرعمل حسابي W ايجاد مي شود ، خطاي روند کردن که کران آن باتوجه به قطع کردن (Chopping) ، گرد کردن (Rounding) توسط روابط (2.10) و (2.11) قابل تعيين است و خطاي انباشتگي که کران آن را براي چهار عمل اصلي بررسي مي کنيم .

۲-8 انباشتگي خطا در محاسبات

فرض مي کنيم دو عدد مثبت $\bar{y},\bar{x}$ تقريبي براي دو عدد y ,x باشند وبه ترتيب خطاي مطلق آنها e_y ,e_x باشد حال به انباشتگي خطا در محاسبات در ذيل مي پردازيم :

۲-9 انباشتگي خطا در عمل جمع : بزرگترين مقدار ممکن يا تقريب بالا براي x وy عبارتست از $\bar{x}+e_x$ و $\bar{y}+e_y$کوچکترين مقدار ممکن يا تقريب پائين براي x وy برابر است با $\bar{x}-e_x$ و $\bar{y}-e_y$ حال بيشتر مقدار ممکن حاصل جمع y ,x برابر است با :

$$\bar{x} + e_x + \bar{y} + e_y = \bar{x} + \bar{y} + (e_x + e_y) \qquad (2.14)$$

کمترين مقدار حاصل جمع y ,x برابراست با :

$$\bar{x} - e_x + \bar{y} - e_y = \bar{x} + \bar{y} - (e_x + e_y) \qquad (2.15)$$

از روابط (2.14) و (2.15) نتيجه ميگيريم که خطاي مطلق حاصل جمع دو عدد y,x برابر است با

خطاي مطلق حاصل جمع = $e_x + e_y$

اما طبق تعریف داریم خطاي نسبي در $\bar{y},\bar{x}$ وجمع دو عدد برابر است با :

$$r_{\bar{x}}=\frac{e_{\bar{x}}}{\bar{x}} \qquad r_{\bar{y}}=\frac{e_{\bar{y}}}{\bar{y}} \qquad , \qquad r_{\bar{x}+\bar{y}}=\frac{e_x+e_y}{\bar{x}+\bar{y}}$$

$$r_{\bar{x}+\bar{y}}=\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}(\frac{e_x}{\bar{x}})+\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}(\frac{e_y}{\bar{y}})=\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}r_{\bar{x}}+\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}r_{\bar{y}}$$

با فرض $\theta=\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}$ داریم $\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}=1-\theta$ لذا داریم :

$$r_{\bar{x}+\bar{y}}=\theta r_{\bar{x}}+(1-\theta)r_{\bar{y}},0\le\theta\le 1$$

اگر $\bar{x}$ نسبت به $\bar{y}$ بسیار بزرگتر باشد نتیجه مي گیریم که $\theta\to 1$ وآنگاه نتیجه مي گیریم که $r_{\bar{x}+\bar{y}}\to r_{\bar{x}}$ اما اگر $\bar{x}$ نسبت به $\bar{y}$ بسیار کوچکتر باشد یعني $\theta\to 0$ آنگاه نتیجه مي گیریم که $r_{\bar{x}+\bar{y}}\to r_{\bar{y}}$ نتیجه مي گیریم که خطاي نسبي عمل جمع مي تواند مقدار متوسط از خطاي تك تك عامل هاي جمع باشد .

۲-10 انباشتگي خطا در عمل تفریق : با تئجه به فرضیات قبل وبا فرض اینکه $\bar{x}>\bar{y}$ باشد داریم :

حداکثر مقدار ممکن تفریق $\qquad \bar{x}+e_x-(\bar{y}-e_y)=\bar{x}-\bar{y}+(e_x+e_y)$

حداقل مقدار ممکن تفریق $\qquad \bar{x}-e_x-(\bar{y}+e_y)=\bar{x}-\bar{y}-(e_x+e_y)$

از روابط فوق نتیجه مي گیریم که خطاي مطلق حاصل از تفریق عبارتست از (e_x+e_y) اما خطاي نسبي

تفریق دو عدد عبارتست از :

$$r_{\bar{x}-\bar{y}}=\frac{e_x+e_y}{\bar{x}-\bar{y}}=$$

$$\frac{\bar{x}}{\bar{x}-\bar{y}}(\frac{e_x}{\bar{x}})+\frac{\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}(\frac{e_y}{\bar{y}})=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}\left[\frac{\bar{x}}{\bar{x}+\bar{y}}r_{\bar{x}}+\frac{\bar{y}}{\bar{x}+\bar{y}}r_{\bar{y}}\right]$$

این رابطه همان رابطه عمل جمع است که داراي مضرب $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{\bar{x}-\bar{y}}$ مي باشد این مضرب بزرگتر از یك است و نشان مي دهد که خطاي نسبي

در عمل تفریق نسبت به جمع با مضربي بزرگتر از يك تمايل به انباشتگي دارد ومضافاً اينكه اگر $\bar{y},\bar{x}$ دو عدد بسيار نزديك به هم باشد مضرب رابطه فوق بيكران مي شود واين خطر در عمل تفريق احتمال دارد . لذا نتيجه مي گيريم كه دو عدد نزديك به هم را در محاسبات نبايستي از هم كم كنيم .

۲-۱۱ انباشتگي خطا در عمل ضرب

حداكثر مقدار ممكن حاصلضرب $(\bar{x}+e_x)(\bar{y}+e_y)=\overline{xy}+(\bar{x}e_y+\bar{y}e_x)+e_xe_y$

حداقل مقدار ممكن حاصلضرب $(\bar{x}-e_x)(\bar{y}-e_y)=\overline{xy}-(\bar{x}e_y+\bar{y}e_x)+e_xe_y$

با اغماض جمله e_xe_y از دو رابطه فوق نتيجه مي گيريم كه خطاي مطلق درحاصلضرب عبارتست از :

$$(\bar{x}e_y+\bar{y}e_x)$$

خطاي نسبي درعمل حاصلضرب برابر است با :

$$r_{\bar{x}\,\bar{y}}=\frac{\bar{x}e_y+\bar{y}e_x}{\bar{x}\,\bar{y}}=\frac{e_y}{\bar{y}}+\frac{e_x}{\bar{x}}=r_{\bar{y}}+r_{\bar{x}}$$

۲-۱۲ **انباشتگي خطا در عمل تقسيم** نسبت $\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$

حداكثر مقدار ممكن (2.16) $\frac{\bar{x}+e_x}{\bar{y}-e_y}$

حداقل مقدار ممكن (2.17) $\frac{\bar{x}-e_x}{\bar{y}+e_y}$

رابطه (2.16) را درنظر مي گيريم :

$$\frac{\bar{x}+e_x}{\bar{y}-e_y}\times\frac{\bar{y}+e_y}{\bar{y}+e_y}=\frac{\bar{x}\,\bar{y}+\bar{x}e_y+\bar{y}e_x+e_xe_y}{\bar{y}^2-(e_y)^2}=\frac{\bar{x}}{\bar{y}}-\frac{\bar{x}}{\bar{y}}(\frac{e_x}{\bar{x}}+\frac{e_y}{\bar{y}})$$

$$\frac{\bar{x}-e_x}{\bar{y}+e_y}\times\frac{\bar{y}-e_y}{\bar{y}-e_y}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}e_y-\bar{y}e_x+e_xe_y}{\bar{y}^2-(e_y)^2}=\frac{\bar{x}}{\bar{y}}+\frac{\bar{x}}{\bar{y}}(\frac{e_x}{\bar{x}}+\frac{e_y}{\bar{y}})$$

رابطه (2.17). رادرنظر مي گيريم از روابط فوق نتيجه مي گيريم كه

خطاي مطلق درعمل تقسيم برابراست با : $\frac{\bar{x}}{\bar{y}}(\frac{e_x}{\bar{x}}+\frac{e_y}{\bar{y}})$

وخطاي نسبي در عمل تقسيم برابر است با : $r_{\bar{x}\div\bar{y}} = \dfrac{\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\left(\frac{e_x}{\bar{x}} + \frac{e_y}{\bar{y}}\right)}{\frac{\bar{x}}{\bar{y}}} = r_{\bar{x}} + r_{\bar{y}}$

مي توان كران بالاي انباشتگي خطاي نسبي در چهار عمل فوق را بصورت زير خلاصه كرد :

$$\left|r_{\bar{x}+\bar{y}}\right| \le \frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\left|r_{\bar{x}}\right| + \frac{|y|}{|\bar{x}+\bar{y}|}\left|r_{\bar{y}}\right| + 0.5\times10^{-t} \qquad (2.18)$$

$$\left|r_{\bar{x}-\bar{y}}\right| \le \frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\left|r_{\bar{x}}\right| + \frac{|y|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\left|r_{\bar{y}}\right| + 0.5\times10^{-t} \qquad (2.19)$$

$$\left|r_{\overline{xy}}\right| \le \left|r_{\bar{x}}\right| + \left|r_{\bar{y}}\right| + 0.5\times10^{-t} \qquad (2.20)$$

$$\left|r_{\bar{x}\div\bar{y}}\right| \le \left|r_{\bar{x}}\right| + \left|r_{\bar{y}}\right| + 0.5\times10^{-t} \qquad (2.21)$$

t دقت ماشين حساب و مبنا سيستم دهدهي فرض شده است .

۲-۱۳ جلوگيري از رشد خطا

باتوجه به انباشتگي خطا در چهارعمل اصلي كه در بالا بررسي كرديم نتيجه مي شود كه از ضرب اعداد تقريبي بزرگ پرهيز نماييم .لذا درضرب اعداد بايستي بطريقي عمل نمود كه عاملهاي ضرب به كران عدد يك محدود شوند .دوم اينكه از انباشتگي خطا در عمل تفريق نتيجه مي گيريم كه تفريق دو عدد تقريباً بهم نزديك بزرگترين منشأ ايجاد خطا در محاسبات مي باشند .

مثال ۲-۶ : از بين ارقام بامعني درست : محاسبه تابع زير را درنظر ميگيريم :

$$f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

با ماشين حساب ٦ رقمي درپايه دهدهي نتايج با مقادير مختلف x درجدول آورده شده است .

X	1	10	100	1000	10000	100000
f(x) جواب تقريبي	0.414210	1.54340	4.99000	15.8000	50.0000	100.000
f(x) جواب واقعي	0.414210	1.54347	4.98756	15.8074	49.9988	158.113

ملاحظه مي كنيد كه هرقدر x بزرگتر مي شود خطا بيشتر مي شود چون $\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+1}$ به هم نزديك تر ميشوند و باعث از دست رفتن ارقام با معني درست مي شود .

دراين تابع خاص با عمليات جبري ساده مي توان ارقام بامعني درست را حفظ نمود .

$$\tilde{f}(x) = x\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{1}\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

حال با ماشين حساب شش رقمي با ضابطه جديد در نقطه x=100 داريم :

f(100) =4.98756 يعني جواب تا ٦ رقم صحيح است

٢-١٤ انباشتگي خطاي نسبي در محاسبه توابع

اگر $\bar{x}$ يك تقريب براي x باشد .مي خواهيم به اين موضوع بپردازيم كه $f(\bar{x})$ تا چه اندازه تقريب مناسبي براي f(x) مي باشد . اكنون نشان مي دهيم در محاسبه $f(\bar{x})$ نيز خطايي انجام مي شود. با استفاده از بسط تيلور داريم :

$$f(x) = f(\bar{x}+e_x) = f(\bar{x}) + e_x f'(\bar{x}) + \frac{{e_x}^2}{2!} f''(\bar{x}) + \dots$$

اكنون باتوجه به كوچك بودن مقدار e_x از توانهاي بالاتر از يك e_x صرف نظر مي كنيم

$$f(x) \cong f(\bar{x}) + e_x f'(\bar{x}) \Rightarrow f(x) - f'(x) \approx e_x f'(\bar{x})$$

انباشتگي خطاي نسبي عبارتست از :

$$\left|\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)}\right| \le \left|\frac{f'(\bar{x})}{f(x)}e_x\right| = \left|\frac{f'(\bar{x})}{f(x)}x\right||r_x| = k|r_x| \qquad (2.22)$$

k را عدد حالت مي نامند ودقت نسبي ورودي يك مسئله را با دقت نسبي خروجي آن مرتبط مي كند . اگر k عدد بزرگي باشد مسئله بدوضع ناميده مي شود . $k=\left|\frac{f'(\bar{x})}{f(x)}x\right|$

مثال ۲-۷ : خطاي نسبي تابع $f(x)=b^x$ را بيابيد

با توجه به رابطه (2.22) داريم :

$$|r_f| \le \left\{\left|\frac{b^x \log b}{b^x}\right||x|\right\}|r_x| \approx (|\log(b)||x|)|r_x|$$

اگر $k=\log b|x|$ عدد بزرگي باشد آنگاه خطاي نسبي در b^x بسيار بزرگتر از خطاي نسبي در x خواهد بود .

يعني اگر $|r_x|\le 10^{-6}$ باشد و k=1000 آنگاه $|r_b x|<10^{-3}$ كه بيانگر افزايش خطا مي باشد .

۲-۱۵ خطا در محاسبه توابع چند متغيره

فرض مي كنيم $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ تابعي n متغيره و مشتق پذير باشد .فرض مي كنيم هريك از متغيرهاي $x_1,x_2,...,x_n$ داراي خطاي مطلق Δx_k به ازاي $k=1,2,...,n$ باشند. بنابراين خطاي مطلق تابع z عبارتست از

$$|\Delta z| = |f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2,...,x_n+\Delta x_n) - f(x_1,x_2,...,x_n)|$$

چون عملاً سعي مي شود كه Δx_k بسيار كوچك باشند ، لذا ضرب آنها و توانهاي بالاي اين مقادير قابل چشم پوشي هستند .بنابراين مي توانيم خطاي مطلق تابع n متغيره z را بصورت زير تقريب زد :

$$|\Delta z| \approx |df(x_1,x_2,...,x_n)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right||\Delta x_k|$$

حال اگر فرض کنیم $\underset{1\le k\le n}{e_{x_k}=\max|\Delta x_k|}$ باشد و e_z کران بالاي خطاي مطلق تابع n متغيره باشد داريم :

$$|e_z|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|e_{x_k} \qquad (2.23)$$

حال کران بالاي خطاي نسبي در z را مي توان بصورت زير بدست آورد .

$$r_z=\frac{|e_z|}{|z|}=\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big/ z\right.\right|e_{x_k}=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}(\ln f(x_1,x_2,...,x_n)\right|e_{x_k}$$

يا

$$r_z=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x_k}(\ln f(x_1,x_2,...,x_n))x_k\right|\left|r_{x_k}\right|\right\} \qquad (2.24)$$

در رابطه (2.24) عدد حالت عبارتست از :

$$r_z=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_k}(\ln f(x_1,x_2,...,x_k))x_k\right|$$

کران بالاي خطاي نسبي تابع دومتغيره $f(x,y)$ به آساني از رابطه فوق مي توان نتيجه گرفت :

$$|r_{f(x,y)}|\le\left|\frac{f_x(\bar{x},\bar{y})}{f(x,y)}x\right||r_x|+\left|\frac{f_y(\bar{x},\bar{y})}{f(x,y)}y\right||r_y|=k_1|r_x|+k_2|r_y|$$

$$k_1=\left|\frac{f_x(\bar{x},\bar{y})}{f(x,y)}x\right| \quad , \quad k_2=\left|\frac{f_y(\bar{x},\bar{y})}{f(x,y)}y\right|$$

k_1,k_2) را عدد شرطي تابع $f(x,y)$ مي نامند .

٢-١٦ عکس فرمول کلي خطا در توابع چند متغيره

در مسائل کاربردي گاهي نياز است که خطاي متغيرهاي يك تابع را بطريقي محاسبه نمود تا خطاي کلي تابع از مقدار مشخص و معيني تجاوز نکند .يا به عبارت ديگر به ازاي کران بالاي خطاي يك تابع بايستي کران بالاي خطاي مطلق هرمتغير را محاسبه نمائيم .اين کار با استفاده از قانون تأثيرات يکسان متغيرها عملي است

يعني بايستي فرض كنيم كه همه ديفرانسيل هاي جزئي $\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k$ را به ازاي k=1,2,...,n كه در خطاي مطلق تابع شركت دارند داراي تأثيرات يكسان هستند. لذا داريم :

$$\left|\frac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1}\right||\Delta x_1| = \left|\frac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_2}\right||\Delta x_2| = ... = \left|\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_n}\right||\Delta x_n|$$

بنابراين با استفاده از

$$|\Delta z| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_k}\right||\Delta x_k| = n\left|\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_1}\right||\Delta x_1|$$

يا

$$= n\left|\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_2}\right||\Delta x_2|$$

تا

$$= n\left|\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_n}\right||\Delta x_n|$$

لذا نتيجه مي گيريم $\quad k=1,2,...,n \quad$ و

$$|\Delta x_k| = \frac{|\Delta z|}{n\left|\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_k}\right|}$$

مثال ۲-۸ : حجم يك كره با قطر d را محاسبه كرده ايم. چنانچه قطر كره d=3.7000 باخطا 0.0500 cm و $\pi \approx 3.14$ با خطاي 0.0016 راديان .كران بالاي خطاي مطلق و نسبي در حجم كره را بيابيد .

حل : حجم كره عبارتست از $v = \frac{\pi d^3}{6}$. كران بالاي خطاي مطلق در حجم كره :

$$|\Delta v| = \left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right||\Delta \pi| + \left|\frac{\partial v}{\partial d}\right||\Delta d|$$

$$\frac{\partial v}{\partial \pi} = \frac{1}{6}d^3 = \frac{1}{6}(3.7000)^3 = 8.4400$$

$$\frac{\partial v}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2 = \frac{1}{2}(3.14)(3.7000)^2 = 21.5000$$

$$|\Delta v| = (8.4400)(0.0016) + (21.5000)(0.0500) = 1.0880 cm^3$$

$v = 1/6\pi d^3 = 1/6(3.1400)(3.7000)^3 = 25.5100 cm^3$

كران بالاي حطاي نسبي عبارتست از :

$$r_v = \frac{1.0880}{25.5100} = 0.0426 \approx \%4$$

مثال ۲-۹ : حجم استوانه اي با شعاع قاعده دو متر (r=2m) و ارتفاع سه متر (h=3m) با خطاي مطلق $0.1\ m^3$ محاسبه شده است .ميزان خطا در شعاع قاعده و ارتفاع را تعيين كنيد . حل :

$$v = \pi r^2 h \qquad \Delta v = 0.1 m^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial \pi} = r^2 h = (2)^2(3) = 12$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 2\pi r h = 2(3.140(2)(3) = 37.7$$

$$\frac{\partial v}{\partial h} = \pi r^2 = (3.14)(4) = 12.56$$

تعداد متغيرها n=3 مي باشد ، لذا داريم :

$$|\Delta \pi| = \frac{|\Delta v|}{n\left|\frac{\Delta v}{\partial \pi}\right|} = \frac{0.1}{3\times 12} = 0.0027 < 0.003$$

$$|\Delta r| = \frac{|\Delta v|}{n\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|} = \frac{0.1}{3\times 37.7} = 0.00088 < 0.001$$

$$|\Delta h| = \frac{|\Delta v|}{n\left|\frac{\partial v}{\partial h}\right|} = \frac{0.1}{3\times 12.6} = 0.00264 < 0.003$$

۲-۱۷ پايداري روشهاي عددي

ما علاقه مند هستيم روشهايي را انتخاب كنيم كه براي طيف وسيعي از مسائل نتايج دقيق و قابل اعتمادي بدست بدهد .هرگاه بتوان معياري را براي الگوريتم اعمال نمائيم مبني بر اينكه تغييرات كوچكي در داده هاي ورودي منجر به تغييراتي كوچك در نتايج نهايي گردد .الگوريتمي كه اين خاصيت رابرآورده سازد ،

پايدار ناميده ميشود والگوريتمي كه اين معيار را برآورده نسازد ، **ناپايدار** خوانده مي شود .
بطوركلي مسئله ناپايداري را مي توان به **ذاتاً ناپايدار**[1] و**ناپايداري واداشته**[2]**يا** ايجاد شده دسته بندي نمائيم .
دسته اول زماني بروز مي كند كه مسئله بدوضع باشد ودسته دوم زماني رخ مي دهد كه انتخاب روش حل مسئله نادرست باشد . در زير با ارائه مثالهايي اين موضوع را پي مي گيريم :

مثال ۲-۱۰ : ريشه هاي چند جمله اي زير را كه به مثال ويلكينسون[3]معروف است را درنظر مي گيريم :

$P_{20}(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-20)=x^{20}-210x^{19}+\ldots+20!$

اين چندجمله اي داراي ريشه هاي ۱و۲و...و۲۰ مي باشد .حال اگر ضريب x^{19} كه ۲۱۰- مي باشد را به $-(210+2^{-23})$ تغيير دهيم كه يك تغيير بسيار كوچك مي باشد .حال اگر جوابهاي چندجمله اي جديد را بيابيم ، ريشه هاي از لحاظ كمي كوچك تر چند جمله اي اخير با دقت قابل قبولي بدست مي آيند درصورتيكه ريشه هاي از لحاظ كمي بزرگتر بامقدار قابل ملاحظه اي تغيير مي يابند .بيشترين تغيير در ريشه هاي شانزدهم و هفدهم ايجاد مي شود كه بصورت مختلط $16.73000\pm i2.81000$ مي باشد .اين تغييرات در ريشه ها به علت **ناپايداري ذاتي** يا بدوضعي چند جمله اي است.

مثال ۲-۱۱ : انتگرال معين زير مفروض است . $n=1,2,\ldots,10$

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+6}dx$$

براي حل اين انتگرال از رابطه بازگشتي زير استفاده مي كنيم :

---
[1] Inherent
[2] Induced
[3] wilkinson

بطوریکه می دانیم : $I_0=\int_0^1 \frac{dx}{x+6}=\ln(\frac{7}{6})=0.15413$

$I_n=1/n-6I_{n-1}, n=1,2,...,10$

با استفاده از رابطه بازگشتي فوق جوابهاي زير را براي مقادير مختلف n مي يابيم

$I_1 \approx 0.07510$ $I_2 \approx 0.04940$ $I_3 \approx 0.03693$

$I_4 \approx 0.02842$ $I_5 \approx 0.02948$ $I_6 \approx -0.01021$

$I_7 \approx 0.20412$ $I_8 \approx -1.09972$ $I_9 \approx 6.70943$

$I_{10} \approx -40.15658$

جواب واقعي $I_{10} \approx 0.01449$ مي باشد. اين تغيير فاحش در جواب I_{10} بعلت ناپايداري واداشته شده است. اما مي دانيم كه انتگرال فوق خوش وضع است و داراي جواب قابل قبول و دست يافتني است ، اگر روش مناسب انتخاب كنيم .

رابطه بازگشتي فوق را مي توان بصورت زير نيز نوشت

$I_{n-1}=1/6(\frac{1}{n}-I_n), \qquad n=10,9,...,1$

از آنجا كه I_n با افزايش n كاهش مي يابد مي توان $I_{10}=0$ اختيار كرد و براين اساس جوابهاي مختلف زير براي مقادير مختلف n مي يابيم :

$I_9 \approx 0.01666$ $I_8 \approx 0.01574$ $I_7 \approx 0.01821$

$I_6 \approx 0.02077$ $I_5 \approx 0.02432$ $I_4 \approx 0.02928$

$I_3 \approx 0.03679$ $I_2 \approx 0.04942$ $I_1 \approx 0.07510$

$I_0 \approx 0.15415$

در صورتيكه مي دانيم مقدار واقعي $I_0=0.15415$ است

براي بررسي بيشتر موضوع رشد خطاي روند كردن وارتباط آن با پايداري الگوريتم ، فرض مي كنيم كه خطايي با قدرمطلق E_0 در مرحله اي از محاسبات وارد مي شود ونيز قدرمطلق خطا ،پس از

عمليات بعدي با E_n نشان داده مي شود .در حالتي كه اغلب موارد در عمل بروز مي كنند ، بصورت زير تعريف مي كنيم :

تعريف ٢-٤ : هرگاه $E_n \approx CE_0$ باشد كه در آن C ثابتي مستقل از n است ، رشد خطا را **خطي** مي ناميم . اما هرگاه $E_n \approx C^n E_0$ به ازاي C>1 باشد ، رشد خط **نمايي** ناميده مي شود .

معمولاً رشد خطا ، غيرقابل اجتناب است و عموماً هنگامي كه E_0 , C كوچك باشند ، نتايج قابل قبول هستند . از آنجايي كه جمله C^n حتي به ازاي مقادير نسبتاً كوچك n ، بزرگ مي باشد بايد از رشد نمايي خطا اجتناب گردد .اين موضوع ، صرف نظر از اندازه E_0 ، منجر به خطاي ناپذيرفتني مي گردد .در نتيجه الگوريتمي كه رشد خطي را ارائه مي دهد **پايدار** مي باشد .و در حالي كه الگوريتمي با رشد نمايي خطا ، **ناپايدار** است .

مثال ٢-١٢ : رايطه بازگشتي زير به ازاي n=2,3,... $P_n = \frac{10}{3}P_{n-1} - P_{n-2}$ جوابي به صورت $P_n = c_1(1/3)^n + c_2(3)^n$ به ازاي تمام مقادير c_1 و c_2 دارد .

هرگاه $p_0=1$ و $p_1=1/3$ انتخاب كنيم $c_1=1$ و $c_2=0$ بدست مي آوريم بطوري كه به ازاي تمام مقادير n ، $p_n = (1/3)^n$ خواهد بود .فرض كنيد كه از حساب گردكردن پنج رقمي براي محاسبه جملات دنباله داده شده به وسيله اين معادله استفاده شده است .در اين صورت $p_0=1.0000$ و $p_1=0.33333$ خواهد بود كه نياز به تغيير ثابتها از مقادير قبلي به $c_1=1.000$ و $c_2 = -0.125 \times 10^{-5}$ دارد .درواينصورت دنباله $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ ايجاد شده بوسيله : $\hat{P}_n = 1.0000(1/3)^n - 0.12500 \times 10^{-5}(3)^n$ تعيين مي شود و خطاي گردكردن $P_n - \hat{p}_n = 0.12500 \times 10^{-5}(3)^n$ بطور نمايي برحسب n رشد مي كند. خطاهاي حاصله را در جدول زير منعكس كرده ايم و نــــشان مي دهد كه با افزايش n خطاي نسبي افزايش مي يابد .يعني رابطه بازگشتي فوق ناپايدار مي باشد .

N	$\hat{p}_n$ مقدار محاسبه شده	p_n مقدار واقعي	خطاي نسبي
0	0.10000×10^{1}	0.10000×10^{1}	
1	0.33333×10^{0}	0.33333×10^{0}	
2	0.11111×10^{0}	0.11120×10^{0}	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{-1}	0.37037×10^{-1}	9×10^{-3}
4	0.12230×10^{-1}	0.12346×10^{-1}	9×10^{-3}
5	0.37660×10^{-2}	0.41152×10^{-3}	8×10^{-2}
6	0.32300×10^{-3}	0.13717×10^{-3}	8×10^{-1}
7	-0.26893×10^{-2}	0.45725×10^{-3}	7×10^{0}
8	-0.92872×10^{-2}	0.15242×10^{-3}	6×10^{1}

مثال ۲-۱۳ : رابطه بازگشتي زير $n=2,3,...$ و $p_n=2p_{n-1}-p_{n-2}$ داراي جواب $p_n=c_1+c_2n$ به ازاي تمام مقادير c_1 وc_2 مي باشد. هرگاه $p_0=1$ و $p_1=1/3$ انتخاب كنيم دراينصورت ثابتها $c_1=1$ و $c_2=-2/3$ مي باشند بطوري كه جواب بصورت زير است : $p_n=1-2n/3$.

اگر با حساب گرد كردن پنج رقمي محاسبه كنيم در نتيجه $\hat{p}_0=1.0000$ و $\hat{p}_1=0.33333$ درنتيجه $c_1=1.0000$ و $c_2=-0.66667$ به اين ترتيب $\hat{p}_n=1.0000-0.66667n$ خطاي گردكردن عبارتست از : $\hat{p}_n-p_n=(0.66667-2/3)^n$ كه بطور خطي برحسب n رشد مي كند اين موضوع و پايداري رابطه در جدول زير نشان داده شده است .

N	$\hat{p}_n$ مقدار محاسبه شده	p_n مقدار واقعي	خطاي نسبي
0	0.10000×10^{1}	0.10000×10^{1}	
1	0.33333×10^{0}	0.33333×10^{0}	
2	-0.33330×10^{0}	-0.33333×10^{0}	3×10^{-5}
3	-0.10000×10^{1}	-0.10000×10^{1}	0
4	-0.16667×10^{1}	-0.16667×10^{1}	0
5	-0.23334×10^{1}	-0.23333×10^{1}	1×10^{-5}
6	-0.30000×10^{1}	-0.30000×10^{1}	0
7	-0.36667×10^{1}	-0.36667×10^{1}	0
8	-0.43334×10^{1}	-0.43333×10^{1}	1×10^{-5}

درپايان تأكيد مي كنيم كه تأثيرات خطاي گردكردن را مي توان با استفاده از محاسبات با تعداد ارقام بيشتر مانند امكان

اختيار دقت مضاعف ويا چند برابر كه در بيشتر رايانه هاي رقمي در دسترس است ، كاهش داد . اما مضرات استفاده از حساب با دقت چندبرابر عبارت از اين است كه زمان محاسباتي بيشتري صرف مي گـــــــردد و ديگر اينكه خطاي روند حذف نمي گردد .بلكه فقط تا انجام محاسبات بعدي به تعويق مي افتد .

وسيله اي براي تخمين خطاي گردكردن ، استفاده از حساب بازه اي است .بطوري كه درپايان بازه اي را كه شامل مقدار درست است ، به دست آورده ايم.البته بطور ايده آل اين بازه بسيار كوچك است.وجوابهاي نهايي مي توانند با عدم قطعيت بسيار كمي داده شوند وليكن هزينه حمل بازه ها بجاي اعداد ماشيني ساده در طول محاسبات طولاني ممكن است روند را مشكل سازد .در نتيجه فقط وقتي كه بايد اعتماد زيادي در محاسبات منظور شود مورد استفاده قرار مي گيرد.

تمرين هاي فصل دوم

۱- چندجمله اي تيلور درجه چهار $p_4(x)$ را براي تابع $f(x)=xe^{x^2}$ حول نقطه $x_0=0$ بيابيد و به ازاي $0\le x\le 0.4$ كران بالايي براي $|f(x)-p_4(x)|$ بيابيد .

۲- با استفاده از جمله خطا در چند جمله اي تيلور خطاي موجود در فرمول $\sin x\approx x$ كه براي تقريباً $\sin 1^o$ بكار مي رود بيابيد .

۳- $\cos 42^o$ را با يك چند جمله اي تيلور حول $\pi/4$ با دقت 10^{-6} تقريب بزنيد.

٤- هرگاه $f(x)=(1-x)^{-1}$ و $x_0=0$ باشد چندجمله اي تيلور $p_n(x)$ راجهت $f(x)$ حول x_0 بيابيد.مقدار ضروري n را براي اين كه دقت تقريب 10^{-6} در بازه $[0,0.5]$ باشد بيابيد؟

۵- چند جمله اي $p_2(x)=1-\frac{x^2}{2}$ براي تقريب f(x)=cos x در بازه [-1/2,1/2] استفاده كرده ايم كراني براي خطاي ماگزيمم بيابيد.

۶-هرگاه x را با $\bar{x}$ تقريب زده باشيم ، خطاي مطلق وخطاي نسبي را حساب كنيد .

الف : $\bar{x}=22.7, x=\pi$ ب: $\bar{x}=2.718, x=e$

پ : $\bar{x}=1.414, x=\sqrt{2}$ ت: $\bar{x}=\sqrt{18}\pi(q/e)^9, x=9!$

۷-محاسبات زير را به روش (I) دقيق (II)حساب جدا كردن سه رقمي و(III) حساب گردكردن سه رقمي انجام دهيد وخطاي نسبي را در قسمتهاي (II) و(III) حساب كنيد .

الف : 4/5+1/3 ب : $\frac{4}{3}.\frac{1}{3}$

پ : $(1/3-3/11)+3/20$ ت : $(1/3+3/11)-3/20$

۸-عدد e را مي توان بوسيله $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ تعريف نمود .خطاي مطلق و خطاي نسبي را در تقريبهاي زير از e حساب كنيد .

الف : $\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n!}$ ب: $\sum_{n=0}^{10}\frac{1}{n!}$

۹-فرض كنيد كه $fl(x)$ تقريب گرد شده t رقمي x در مبناي β باشد نشان دهيد كه $\left|\frac{x-fl(x)}{x}\right|\le 1/2\beta^{1-t}$.

۱۰-با استفاده از حسال جداكردن سه رقمي براي محاسبه مجموع $\sum_{i=1}^{10}1/i^2$ نخست بوسيله $1+1/4+...+1/100$ وسپس با $1/100+1/81+...+1/1$ استفاده كنيد .كدام روش دقيق تر است.چرا ؟

۱۱-فرض كنيد كه دنباله هاي $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\hat{\alpha}_n\}_{n=1}^{\infty}$ به ازاي هرمقدار صحيح $n\ge 1$ با $\alpha_n=\frac{n+1}{n^2}$ و $\hat{\alpha}_n=\frac{n+3}{n^3}$ مشخص شده اند . اگرچه $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ و

$\lim_{n \to \infty} \hat{\alpha}_n = 0$ ولي دنباله $\{\hat{\alpha}_n\}$ بسيار سريعتر از دنباله $\{\alpha_n\}$ به اين حد همگرا مي شود وچرا ؟

۱۲-فرض كنيد d,c,b,a اعداد مثبت باشند .چنانچه محاسبات را با احتساب گرد كردن تا t رقم در مبناي دهدهي جمع كنيم y=a+b+c+d در چه صورتي كمترين خطا را ايجاد مي كند .

فصل سوم

۳- حل معادلات غیر خطي

در این فصل درصدد یافتن ریشه معادله یك متغیره به صورت $f(x)=0$ هستیم . این معادله مي تواند به صورت صریح زیر باشد .

$f(x)=P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$

یعني یك چندجمله اي از درجه n از x ویا مي تواند یك تابع فرازنده باشد .

تعریف ۳-۱: عدد α را جواب معادله $f(x)=0$ گویند هرگاه $f(\alpha)=0$ چنین جوابي را ریشه یا صفر معادله $f(x)=0$ مي نامند .

از لحاظ هندسي ریشه معادله $f(x)=0$ مقداریست براي x كه نمودار y=f(x) محور xها را درآن قطع مي كند.

تعریف۳ -۲ : هرگاه بتوان $f(x)=0$ را به صورت زیر بیان كنیم :

$f(x)=(x-\alpha)^m g(x)=0$

بطوریكه g(x) محدود و $g(\alpha)\neq 0$باشد آنگاه α را m ریشه تكراري f(x) گوئیم .بنابراین اگر m=1 باشد ریشه f(x)=0 را ریشه ساده مي نامیم .

به طور كلي اگر صحبت كنبم ریشه f(x)=0 را مي توان با دو روش مستقیم یا روش تكراري بدست آورد. روشهاي مستقیم یا بعبارت دیگر روشهاي تحلیلي در همه حالات پاسخگوي حل $f(x)=0$ نمي باشند .لذا در این فصل به بررسي برخي روشهاي تكراري كه جواب تقریبي براي $f(x)=0$ را بدست مي دهند مي پردازیم .روشهاي تكراري مبتني

بر تقريبهاي متوالي هستند و با يك يا چند تقريب اوليه شروع مي شوند ودنباله اي از تكرارها $\{x_n\}$ كه نهايتاً به ريشه واقعي α همگرا هستند ايجاد مي كنند .

تعريف ۳-۳ : دنباله تكراري $\{x_n\}$ را همگرا به ريشه واقعي α مي ناميم هرگاه

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - \alpha| = 0$$

۳-۱- روش نصف كردن يا دو بخشي

اين روش بر قضيه مقدار مياني استوار است .فرض كنيد f تابعي پيوسته وبربازه [a,b] تعريف شده باشد به طوريكه علامتهاي f(a) و f(b) با هم مخالف باشند .بنا بر قضيه مقدار مياني ، نقطه اي چون α ، در (a,b) وجود دارد به طوري كه $f(\alpha)=0$.در حالتي كه f(a) و f(b) مختلف العلامه باشند وبيش از يك ريشه در بازه (a,b) موجود باشد مي توان با محدود كردن بازه مطمئن شد كه تنها يك ريشه در بازه موجود باشد .براي آساني كار فرض مي كنيم كه f(a) و f(b) مختلف العلامه باشند ويك ريشه در [a,b] موجود باشد .با استفاده از روش نصف كردن مكرر زير بازه هاي [a,b] و تعيين نيمه اي كه شامل ريشه α است . براي شروع فرض مي كنيم $a_0=a$ و $b_0=b$ باشد . فرض مي كنيم $w_1=\frac{a_0+b_0}{2}$ باشد اگر $f(w_1)=0$ باشد در اين صورت $\alpha=w_1$ مي باشد واگر چنين نباشد $f(w_1)$ با $f(a_0)$ يا $f(b_0)$ هم علامت است اگر $f(w_1)$ و $f(a_0)$ هم علامت باشند در اين صورت $\alpha\in(w_1,b_0)$ آنگاه $a_1=w_1$ و $b_1=b_0$. اما اگر $f(w_1)$ و $f(a_0)$ مختلف العلامه باشند در اين صورت $\alpha\in(a_0,w_1)$ مي باشد آنگاه $a_1=a_0$ و $w_1=b_1$.سپس اين عمل را در بازه $[a_1,b_1]$ تكرار مي كنيم بنابراين الگوريتم اين روش عبارتست از :

براي يك بازه اوليه $[a_0,b_0]=[a,b]$ وبراي $n=0$

مرحله ۱- محاسبه كن $w_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}(b_n-a_n)$

۲- اگر $f(w_{n+1})f(a_n)<0$ آنگاه $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=w_{n+1}$

۳- اگر $f(w_{n+1})f(b_n)<0$ آنگاه $b_{n+1}=b_n$,$a_{n+1}=w_{n+1}$

۴- اگر $|f(w_{n+1})|\le\varepsilon$ يا $|w_{n+1}-w_n|\le\varepsilon$ روند را متوقف كن در غير اينصورت $n=n+1$ برو به مرحله اول

۲-۳ همگرايي و تحليل خطا در روش نصف كردن

قضيه ۳-۱ : اگر $[a_0,b_0],[a_1,b_1],...[a_n,b_n],...$ بازه ها را در روش نصف كردن نشان دهند ، آنگاه حدود $\lim_{n\to\infty} a_n$ و $\lim_{n\to\infty} b_n$ موجود هستند و برابرند وبيانگر يك ريشه f هستند اگر $\alpha=\lim_{n\to\infty} x_n$ و $x_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}+a_{n-1})$

آنگاه : $|\alpha-x_n|\le 2^{-n}(b_0-a_0)$

نتيجه : اگر معيار دقت حل مسئله ε باشد يعني $|\alpha-x_n|\le\varepsilon$ تعداد حداقل مراحل تكراري كه بايستي انجام پذيرد عبارتست از :

$$|\alpha-x_n|\le 2^{-(n)}(b_0-a_0)\le\varepsilon$$

$$(b_0-a_0)<2^n\varepsilon\Rightarrow n\ge\frac{\log_{10}(b_0-a_0)-\log_{10}\varepsilon}{\log_{10}2}$$

۳-۳ سرعت همگرايي روش نصف كردن

داريم $x_n=\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})$ اگر فرض كنيم كه روش همگرا به ريشه واقعي α است يعني $\lim_{n\to\infty}|x_n|=\alpha$ باشد داريم :

$$|e_n|=|\alpha-x_n|\le 2^{-n}(b_0-a_0) \qquad (3.1)$$

به همين طريق داريم :

$$|e_{n+1}|=|\alpha-x_{n+1}|\le 2^{-(n+1)}(b_0-a_0) \qquad (3.2)$$

با استفاده از (3.1) و (3.2) مرتبه همگرايي روش دوبخشي را مي توانيم بيابيم .

يعني داراي سرعت همگرا يي خطي است .

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| = \frac{1}{2}$$

روش نصف كردن همواره همگراست واين مزيت روش نصف كردن مي باشد . اين روش يك روش Global است يعني همگرايي آن منوط به تقريب اوليه دلخواه نيست يعني نيازي نيست كه تقريب اوليه چه مقدار به ريشه واقعي نزديك باشد .(البته بايد داشته باشيم $f(a)f(b)<0$) درمقابل اين روش روشهاي تكراري ديگر locally (موضعي) همگرا هستند يعني بايستي شروع اوليه نزديك ريشه واقعي انتخاب گردد.

عدم مزيت اين روش علاوه بر كندبودن آن نمي توان براي ريشه هايي كه مماس بر محور x مي باشند به كار گرفت و همچنين نمي توان اين روش را براي حل $f(x)=x^2$ بكاربرد .

مثال ۳-۱ – با استفاده از روش دوبخشي ، ريشه معادله $(2x+1)^2 - 4\cos \pi x = 0$ را كه در فاصله [1/4,1/3] قرار دارد با معيار دقت 10^{-3}بيا بيد.

$$f(x) = (2x+1)^2 - 4\cos \pi x = 0$$

$$f(1/4) = -0.5784 \qquad , \qquad f(1/3) = 0.7777$$

$$n \geq \frac{\log(1/3 - 1/4) + 3}{\log 2} = \frac{3 - \log 12}{\log 2} \approx 5$$

n	a_n	b_n	w_{n+1}	$f(w_{n+1})$
0	1/4	1/3	-------	----------
1	1/4	1/3	0.2917	0.724
2	1/4	0.2917	0.2709	-0.2596
3	0.2709	0.2917	0.2813	-0.0954
4	0.2813	0.2917	0.2865	0.0724
5	0.2865	0.2917	0.2891	0.0287

$$|w_{n+1} - w_n| = |0.2891 - 0.2865| = 0.0026$$

مثال ۳-۲ معادله $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ يك ريشه در $[1,2]$ دارد. اين ريشه را با معيار دقت 10^{-3} بيابيد .

$$n \geq \frac{\log_{10}(b-a) - \log_{10}\varepsilon}{\log_{10} 2} = \frac{3}{\log 2} \approx 9.96$$

تعداد تكرارهاي لازم بايستي حداقل برابر ۱۰ باشد $n \geq 10$

حل : با استفاده از روش نصف كردن داريم :

$$f(2) = 14, \ f(1) = -2$$

n	a_n	b_n	w_{n+1}	$f(w_{n+1})$
0	1	2	--------------	----------
1	1	2	1.5	2.375
2	1	1.5	1.25	-1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
10	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072

تمرین ها :

۱- ریشه مثبت $x^2-4x\sin x+(2\sin x)^2=0$ را با دقت دو رقم بامعني صحيح بيابيد .

۲- فرمولي براي تعداد گامهايي كه در الگوريتم تنصيف اختيار مي شود ارائه دهيد كه شامل ε, b_0, a_0 بوده و تضمين كند كه ريشه با دقت نسبي كوچكتر يا مساوي ε تعيين مي شود . $a_0>0$

۳- روش نصف كردن را با بازه [1.5,3.5] درنظر بگيريد .

الف : طول بازه در مرحله n ام اين روش چقدر است ؟

ب : ماكزيمم فاصله ممكن بين ريشه α و نقطه وسط اين بازه چقدر است ؟

٤- با استفاده از روش نصف كردن جواب تقريبي با دقت 10^{-3} را براي معادله زير در بازه [1/2,3/2] بيابيد.

$$2+\cos(e^x-2)-e^x=0$$

٦- با استفاده از روش نصف كردن ، تقريبي براي $\sqrt{3}$ با دقت 10^{-6} بيابيد .

٧- با روش نصف كردن ، تقريبي براي ريشه $x\cos x-2x^2+3x-1=0$ در بازه [0.2,0.3] و $1.2\le x\le 1.3$ با معيار دقت 10^{-5} بيابيد .

۳-٤ روش وتري(Secant)

براي حل معادله f(x)=0 فرض مي كنيم f(x) دريازه [a,b] داراي يك ريشه و پيوسته باشد ، اگر f(a)f(b)<0 باشد. چنانچه f(x) را باخط تقريب بزنيم يعني

$$f(x) \approx \alpha_0 x + \alpha_1 = 0 \qquad (3.3)$$

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \alpha_0 \neq 0$$

ضرايب α_1, α_0 نامعين هستند و بايستي محاسبه شوند لذا اگر فرض كنيم x_{n-1}, x_n دو تقريب متوالي براي ريشه $f(x)=0$ باشند باتوجه به اين كه در رابطه (3.3) بايستي صدق نمايد داريم :

$$f(x_n) = \alpha_0 x_n + \alpha_1 \qquad (3.4)$$

$$f(x_{n-1}) = \alpha_0 x_{n-1} + \alpha_1 \qquad (3.5)$$

از حل رابطه (3.4) و (3.5) داريم

$$\alpha_0 = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$\alpha_1 = \frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{x_n - x_{n-1}}$$

حال اگر α_1, α_0 را در رابطه $x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ قرار دهيم مي توان تقريبي براي مرحله بالاتر تكرار يعني x_{n+1} بيابيم لذا داريم :

$$x_{n+1} = -\frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{x_n - x_{n-1}} \times \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = -\frac{x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

با اضافه وكم كردن $x_n f(x_n)$ به صورت كسر فوق و ساده كردن آن داريم :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)., n \geq 1$$

۳-٥ الگوريتم روش وتري : براي معيار دقت داده شده x_1, x_0, ε تقريبهاي اوليه از پيش معلوم عبارتست از :

۱- براي n=1

۲- محاسبه کن : $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}f(x_n)$

۳- اگر $|x_{n+1}-x_n|\le\varepsilon$ است برو به مرحله ٤ درغیر اینصورت n=n+1 برو به مرحله ۲.

٤- روند را متوقف کن .

۳-٦ نمایش هندسي روش وتري :

در این روش تابع f(x) راباوتري که از نقاط $(x_n,f(x_n))$ و $(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ مي گذرد تقریب مي زنیم و محل تلاقي این وتر با محور x ها را تقریب بعدي براي ریشه معادله f(x)=0 مي باشد. حال نقطه $(x_{n+1},f(x_{n+1}))$ را با هرکدام از دو نفطه فوق مي توان درنظر گرفت و وتر بین دو نقطه را رسم نمود. اگر وتري را درنظر بگیریم که همواره $f(x_{n+1})f(x_n)<0$ باشد یا $(f(x_{n+1})f(x_{n-1})<0)$ روش حاصل را روش ناجایي یا Regula -Falsi مـــــــي نامند که همواره همگراست. در غیر اینصورت روش را روش وتري مي نامیم .

۳-۷ الگوریتم روش ناجایي :

براي تابع f(x) که در بازه [a ,b] پیوسته و مختلف العلامه باشند (f(a)f(b)<0) و براي مقدار اولیه هاي x_1,x_0 معلوم و معیار دقت ε داده شده عبارتست از :

۱-براي n=1

۲- محاسبه کن $w_{n+1}=\frac{a_nf(b_n)-b_nf(a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$

۳- اگر $f(a_n)f(w_{n+1})<0$ $b_{n+1}=w_{n+1}$ و $a_{n+1}=a_n$ درغیر اینصورت $b_{n+1}=b_n$ و $a_{n+1}=w_{n+1}$

٤- اگر $|w_{n+1}-w_n|\le\varepsilon$ یا $|f(w_{n+1})|\le\varepsilon$ باشد برو به مرحله ٥ در غیر اینصورت n=n+1 برو به مرحله ۲.

٥- روند را متوقف کن.

۳-۸ تحليل خطا و سرعت همگرايي روش وتري :

فرض مي كنيم x_n تقريبي براي ريشه واقعي $f(x)=0$ باشد و α نيز ريشه واقعي $f(x)$ باشد بنابراين

$$x_n - \alpha = e_n$$

يا

$$x_n = \alpha + e_n$$

ويا

$$x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$$

با جايگزيني اين موارد در روش وتري داريم :

$$\alpha + e_{n+1} = \alpha + e_n - \frac{\alpha + e_n - \alpha - e_{n-1}}{f(\alpha + e_n) - f(\alpha - e_{n-1})} f(\alpha + e_n)$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n - e_{n-1}}{f(\alpha + e_n) - f(\alpha - e_{n-1})} f(\alpha + e_n) \qquad (3.6)$$

رابطه (3.6) معادله خطاي روش وتري است . حال اگر در رابطه (3.6) ، $f(\alpha + e_n)$ و $f(\alpha - e_{n-1})$ با استفاده از سري تيلور حول α بسط دهيم داريم .

$$e_{n+1} = e_n - \frac{(e_n - e_{n-1})[f(\alpha) + e_n f'(\alpha) + \frac{1}{2} e^2{}_n f''(\alpha) + \ldots]}{[f(\alpha) + e_n f'(\alpha) + \frac{1}{2} e^2{}_n f''(\alpha) + \ldots] - [f(\alpha) + e_{n-1} f'(\alpha) + \ldots]}$$

اگر توانهاي $e^3{}_n$ به بعد را ناديده بگيريم و چون $f(\alpha) = 0$ است رابطه بالا بصورت زير ساده مي شود .

$$e_{n+1} = e_n - \frac{(e_n - e_{n-1})(e_n + \frac{1}{2} e^2{}_n \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)})}{e_n - e_{n-1} + \frac{1}{2}(e^2{}_n - e^2{}_{n-1}) \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}}$$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n + \frac{1}{2} e^2{}_n \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}}{1 + \frac{1}{2}(e_n + e_{n-1}) \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}}$$

$$e_{n+1} = e_n - (e_n + \frac{1}{2} e^2{}_n \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}) \left[1 + \frac{1}{2}(e_n + e_{n-1}) \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right]^{-1} \qquad (3.7)$$

اگر فرض کنیم $\frac{1}{2}\left|(e_n+e_{n-1})\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right|<1$ باشد آنگاه داریم :

$$e_{n+1}=e_n-(e_n+\frac{1}{2}e^2{}_n\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)})(1-\frac{1}{2}(e_n+e_{n-1})\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)})$$

$$=-\frac{1}{2}e^2{}_n\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+\frac{1}{2}(e^2{}_n+e_ne_{n-1})\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+O(e^2{}_n)$$

$$e_{n+1}=\frac{1}{2}e_ne_{n-1}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+O(e^2{}_n)$$

$$e_{n+1}=Ce_ne_{n-1}.,C=\frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \qquad (3.8)$$

حال طبق تعریف سرعت همگرایي یك روش تكراري داریم كه یك روش داراي سرعت همگرایي p است اگر $p>0\in R$ و $e_{n+1}=Ae_n^p$ لذا داریم

$e_n=Ae_{n-1}^p$ و یا $e_{n-1}=A^{-\frac{1}{P}}e^{1/P}{}_n$

این موارد را در رابطه (3.8)قرار مي دهیم :

$$Ae^P{}_n=Ce_n.A^{-\frac{1}{P}}e^{\frac{1}{P}}{}_n$$

$$Ae^P{}_n=C.A^{-\frac{1}{P}}e_n{}^{1+\frac{1}{p}}$$

$$e^P{}_n=CA^{-(1+\frac{1}{p})}e_n{}^{(1+\frac{1}{p})} \qquad (3.9)$$

توان e_n در دو طرف (3.9) را متحد قرار مي دهیم . بنابراین داریم :

$$p=1+\frac{1}{p}\Rightarrow p^2-p-1=0$$

$$p=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$$

سرعت همگرایي روش وتري عبارت است از :

$$p=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=1.618$$

مثال ۳-۳ : با استفاده از روش وتري وروش ناجايي ريشه معادله زير را تا ٤ رقم اعشار صحيح با معني بدست آوريد

$$f(x) = \cos x - xe^{x} = 0 \qquad x \in [0,1]$$

حل:

$$f(0) = 1 \text{ و } f(1) = \cos 1 - e = -2.17798$$

$x_0=0$, $x_1=1$

روش وتري

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), n \geq 1$$

$$n = 1 \quad , \quad x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0} f_1 = 1 - \frac{1-0}{-2.17798-1}(-2.17798) = 0.31466$$

$$n = 2 \quad , \quad x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f_2 - f_1} f_2 = 0.31466 - \frac{0.31466-1}{0.51987+2.17798}(0.51987) = 0.44673$$

به همين طريق عمل مي كنيم تمامي محاسبات در جدول زير آمده است .

n	X_{n+1}	$f(x_{n+1})$
1	0.31466	0.51987
2	0.44673	0.20354
3	0.53171	-0.42931×10^{-1}
4	0.51690	0.25928×10^{-2}
5	0.51775	0.30111×10^{-4}
6	0.51776	-0.2151×10^{-7}

حل باروش ناجايي :

$x_0=0$, $x_1=1$

$$f(x_0) = f(0) = 1 > 0 \qquad f(x_1) = f(1) = -2.17798 < 0$$

n=1

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0} f_1 = 0.31466$$

$$f(x_2) = f(0.31466) = 0.51987 > 0$$

ريشه بين x_1,x_2 است

n=2

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f_2 - f_1} f_2 = 0.44673$$

$$f(x_3) = f(0.44673) = 0.20354 > 0$$

ریشه بین x_1 و x_3 لذا در مرحله بعدي وقتي n برابر ۳ باشد به جاي x_2 از x_1 استفاده مي كنيم .

n=3
$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - x_1}{f_3 - f_1} f_3 = 0.44673 - \frac{0.44673 - 1}{0.20354 + 2.17798}(0.20354) = 0.49402$$
$$f(x_4) = 0.70802 \times 10^{-1} > 0$$

ریشه بین x_4 و x_1 است .لذا در مرحله بعد x_3 را با x_1 عوض مي كنيم و اين روند را ادامه مي دهيم . سرانجام محاسبات را در جدول زير درج مي نمائيم كه نشان مي دهد روش نابجايي داراي سرعت همگرايي كند تر از روش وتري است .

n	X_{n+1}	$f(x_{n+1})$
1	0.31466	0.51987
2	0.44673	0.20354
3	0.49402	0.70802×10^{-1}
4	0.50995	0.23608×10^{-1}
5	0.51520	0.77601×10^{-2}
6	0.51692	0.25389×10^{-2}
7	0.51748	0.82936×10^{-3}
8	0.51767	0.27079×10^{-3}

۳-۹ روش نيوتن رافسون

به طور كلي روش نيوتن سريعتر از روشهاي تكراري ديگر نظير نصف كردن يا وتري مي باشد .زيرا همگرايي آن فوق خطي و از مرتبه دوم است به محض آنكه همگرايي مؤثر واقع گردد يعني مقادير دنباله روش نيوتن به اندازه كافي نزديك به ريشه واقعي باشند همگرايي به قدري سريع مي باشد كه فقط چند جمله ديگر از دنباله ، مورد نياز خواهد بود . اما متأسفانه اين روش هميشه همگرايي را تضمين نمي كند . غالباً اين روش را با ساير روشهاي كندتر در يك پيوند تركيبي به كار مي گيرند تا از لحاظ عددي جامع همگرا گردد (globaly).

فرض مي كنيم تابع f(x) در بازه [a,b] پيوسته باشد . اگر اين تابع داراي مشتق مرتبه دوم پيوسته باشد واگر فرض كنيم α

ريشه واقعي و x_n جواب تقريبي براي $f(x)=0$ باشد دراينصورت $f(x)$ را حول x_n با سري تيلور بسط مي دهيم :

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\zeta_n)$$

به طوريكه ζ_n بين x_n و x قرار دارد .براي بدست آوردن الگوريتم از اين رابطه ، $f(x)=0$ مي گيريم و x را برحسب $f(x_n), f'(x_n)$ مي يابيم

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}(x - x_n)^2 \frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} \qquad (3.10)$$

چنانچه x_n نزديك به x باشد مي توان از جمله دوم صرف نظر نمود و x_{n+1} را اين چنين تعريف مي كنيم :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (3.11)$$

۳-۱۰ الگوريتم روش نيوتن رافسون براي ε داده شده براي حل $f(x)=0$:

۱- براي $n=0$

۲- محاسبه كن $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

۳- اگر $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ يا $|f(x_n)| \le \varepsilon$ روند را متوقف كن درغير اينصورت $n=n+1$ برو به مرحله دوم .

۳-۱۱ نمايش هندسي روش نيوتن رافسون :

مطابق شكل فرض مي كنيم درصدد يافتن ريشه α تابع $y=f(x)$ هستيم با يك تقريب اوليه x_0 شروع مي كنيم . ايده اساسي روش نيوتن استفاده از خط مماس براي تقريب f است در ابتدا يعني خطي مماس كه از نقطه $(x_0,f(x_0))$ رسم مي شود ، فرمول اين خط عبارتست از

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0)\Rightarrow y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

این خط محور x ها را در یك نقطه y=0 قطع مي كند

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

این رابطه را براي x حل مي كنیم $x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

این نقطه بسیار نزدیکتر به جواب واقعي α است عین همین روند را ادامه مي دهیم .

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

.

.

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f''(x_0)>0$$

$$f(x_0)>0$$

$$f(x_0)f''(x_0)>0$$

۳-۱۲ خطاي روش نیوتن :

قضیه ۳-۲ : براي $I\subseteq R$ ، $f\in C^2(I)$ مفروض است . هم چنین براي $\alpha\in I$ $f(\alpha)=0$ باشد . اگر $x_n\in I$ داده شده باشد تعریف مي كنیم

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

آنگاه نقطه اي مانند ζ_n بین α و x_n وجود دارد به طوري كه :

$$(\alpha-x_{n+1})=-\frac{1}{2}(\alpha-x_n)^2\frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} \qquad (3.12)$$

از قضیه فوق نتیجه مي گیریم كه خطا دریك مرحله مربع خطاي مرحله قبل از آن است . زماني كه خطا به اندازه كافي كوچك باشد سریعاً شروع به كاهش مي نماید . در حقیقت اگر فرض كنیم كه $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha$ و همچنین $f'(\alpha)\neq 0$ روند همگرا باشد و آنگاه مي

و $f'(x_n) \approx f'(\alpha)$ و $f''(\zeta_n) \approx f''(\alpha)$ توانيم بگوئيم كه بنابراين

$$(\alpha - x_{n+1}) \approx C(\alpha - x_n)^2 \quad , \quad C = -\frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

اين رابطه نشان مي دهد كه تقريب اوليه x_0 بايستي به ريشه واقعي نزديك باشد تاهمگرايي حاصل شود .
مضافاً اينكه مي توان با فرض اينكه روش همگرا باشد نتيجه گرفت كه :

$$\lim \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

مشروط بر اينكه f'', f' پيوسته باشند .

مثال ۳-٤ : ريشه مثبت معادله $f(x) = \cos x - x = 0$ را با استفاده از روش نيوتن رافسون تا ۹رقم با معني صحيح بيابيد.

حل : $f(0) = 1, f(\pi/2) = -\pi/2$

براساس قضيه مقدار مياني داراي حداقل يك ريشه در $[0, \pi/2]$ است .نمودار معادلات $y_1=x$ و $y_2=\cos x$ در شكل زير نشان مي دهد كه در فاصله فوق فقط يك ريشه وجود دارد .
با انتخاب $x_0 = \pi/4$ مي توان الگوريتم رافسون را براي مسئله فوق بصورت زير نوشت .

$$f(x) = \cos x - x \Rightarrow f(x_n) = \cos x_n - x_n$$
$$f'(x) = -\sin x - 1 \Rightarrow f'(x_n) = -(\sin x_n + 1)$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + 1}, n = 0,1,2,...$$

n=0 $\quad x_1 = x_0 + \dfrac{\cos x_0 - x_0}{\sin x_0 + 1} = \pi/4 + \dfrac{\cos \pi/4 - \pi/4}{\sin \pi/4 + 1} = 0.785398163$

n=1 $x_2 = x_1 + \frac{\cos x_1 - x_1}{\sin x_1 + 1} = 0.739536134$

بقیه جوابها دا در جدول زیر آورده ایم :

N	x_n
0	0.785398163
1	0.739536134
2	0.739085178
3	0.739085133
4	0.739085133

مثال ۳-۵ : با استفاده از روش نیوتن رافسون ریشه معادله $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$ را دربازه [-11,-10] تا پنج رقم اعشار بدست آورید .

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$

f(-11)=3453 f(-10)=-1050

$f'(x) = 4x^3 - 6x + 75$

با استفاده از x_0=-11 داریم :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^4{}_n - 3x^2{}_n + 75x_n - 10000}{4x^3{}_n - 6x_n + 75}, n \geq 0$$

n=0 $x_1 = x_0 - \frac{x^4{}_0 - 3x^2{}_0 + 75x_0 - 10000}{4x^3{}_0 - 6x_0 + 75} = -10.3338$

n=1 $x_2 = -10.3268$

n	x_{n+1}
0	-10.3338
1	-10.3268
2	-10.2618
3	-10.2610

تمرين ها :

۱- فرض كنيد $f(x)=-x^3-\cos x$ و $x_0=-1$ از روش نيوتن براي يافتن x_2 استفاده كنيد . آيا مي توان از $x_0=0$ استفاده نمود ؟

۲- فرض كنيد $\ln(x-1)+\cos(x-1)=0$ در بازه [1/3,2] داراي يك ريشه باشد . با روشهاي وتري نابجايي و نيوتن جواب آنرا با دقت 10^{-5} بيابيد .

۳- معادله $x^2-10\cos x=0$ داراي جواب ± 1.3793646 است از روش نيوتن براي تقريب جوابها با دقتي در حدود 10^{-5} با مقادير اوليه زير استفاده كنيد .

الف) $x_0=-100$ ب) $x_0=-25$ پ) $x_0=100$ ت) $x_0=25$

٤- كوچكترين ريشه مثبت $\cos x=x^2$ را با معيار دقت 10^{-2} با روش دلخواه بيابيد .

٥- با استفاده از روش نيوتن رافسون الگوريتمي براي يافتن ريشه دوم عدد صحيح N بنويسيد؟ سپس براي N=18 حل كنيد .معيار دقت حل مسئله 10^{-4} مي باشد .

٦- براي $\frac{1}{N}$ و $N^{\frac{1}{3}}$ روش تكراري نيوتن رافسون بنويسيد (N اعداد حقيقي مثبت هستند) .

۳-۱۵ روش نقطه ثابت (يا تكرار ساده)

يك نقطه ثابت براي تابع داده شده g عددي چون α است كه به ازاي آن : $\alpha = g(\alpha)$

در اين قسمت به يافتن جوابهاي تقريبي براي معادله f(x)=0 ، با روش نقطه ثابت مي پردازيم .براي اينكار مي توان به طرق متعدد ، تابعي چون g(x) با نقطه ثابت α چنان بيابيم كه بعنوان مثال g(x)=x-f(x) گردد .برعكس هرگاه تابعي چون g . نقطه اي ثابت در α داشته باشد دراين صورت تابع تعريف شده با : f(x)=x-g(x) يك ريشه در α دارد .

قضيه ۳-۵ : فرض مي كنيم $g \in C[a,b]$ وبه ازاي همه مقادير $x \in [a,b]$ ، $a \le g(x) \le b$ آنگاه

الف: g داراي حداقل يك نقطه ثابت $\alpha \in [a.b]$ است .

ب: اگر مقداري مانند $\gamma < 1$ وجود داشته باشد به طوري كه :

$$|g(x) - g(y)| \le \gamma |x - y| \qquad (3.13)$$

به ازاي جميع مقادير x,y دربازه [a,b] برقرار باشد آنگاه :

I - α منحصربفرد است .

II- روش تكراري $x_{n+1} = g(x_n)$ به ازاي هرتقريب اوليه اي $x_0 \in [a,b]$ به α همگرا است .

III- و رابطه خطاي روش عبارتست از

$$|\alpha - x_n| \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} |x_1 - x_0| \qquad (3.14)$$

۳-۱٦ الگوريتم نقطه ثابت

الگوريتم روش نقطه ثابت براي حل f(x)=0 وبا فرض اينكه مي توان x=g(x) را بصورت منحصربفرد يافت و با تقريب اوليه داده شده x_0 و معيار دقت ε داده شده عبارتست از :

١- براي n=0

٢- محاسبه کن $x_{n+1}=g(x_n)$

٣- اگر $|x_{n+1}-x_n|\le\varepsilon$ برو به مرحله چهارم درغير اينصورت n=n+1 برو به مرحله دوم

٤- روند را متوقف کن .

٣-١٧ نمايش هندسي روش نقطه ثابت :

x=g(x)

$y_1=x$, $y_2=g(x)$

دو منحني y_2,y_1 را رسم مي کنيم و محل تلاقي اين دو منحني ريشه مورد نظر مي باشد.

مثال ٣-٦ : براي حل معادله زير يك روش نقطه ثابت مناسب بنويسيد:

$$f(x)=2\tan x-x-1=0$$

حل: اگر رابطه فوق را بصورت زير درنظر بگيريم

$$x=2\tan x-1$$

$$\therefore g(x)=2\tan-1\Rightarrow|g'(x)|=2|\sec^2 x|>1$$

اما اگر :

$$2\tan x=1+x\Rightarrow\tan x=\frac{1+x}{2}$$

يا :

$$x=\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)\Rightarrow g(x)=\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

$$|g'(x)|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{4}}\right|=\left|\frac{2}{4+(1+x)^2}\right|<1$$

مثال ٣-٧ : رابطه تکراري زير مفروض است : $x_{n+1}=g(x_n)$

درصورتیکه $g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$ باشد آنگاه مي توان نتيجه گرفت كه $0\le g(x)\le\frac{1}{4}$ براي $x\ge 0$ است.بنابراين $g(x)\in[0,\frac{1}{2}]$ بر $x\in[0,\frac{1}{2}]$ است. از آنجا كه g(x) پيوسته در بازه [0,1/2] است در اين بازه يك نقطه ثابت وجود دارد. چون g پيوسته و مشتق پذير است در بازه [0,1/2] و $|g'(x)|=\left|-\frac{1}{2}e^{-x}\right|\le\frac{1}{2}<1$ براي جميع $x\in[0,\frac{1}{2}]$ يك نقطه منحصربفرد ثابت در [0,1/2] موجود است. لذا طبق قضيه ۳-٦ روش نقطه ثابت همگراست .

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}e^{-x_n},n\ge 0$$

۳-۱۸ روش نقطه ثابت با همگرايي مراتب بالاتر

قضيه ۳-۷ : روش نقطه ثابت $x_{n+1}=g(x_n)$ مفروض است. بطوريكه g ، p مرتبه پيوسته و مشتق پذير باشد و $\alpha=g(\alpha)$. اگر :

$g'(\alpha)=g''(\alpha)=...=g^{(p-1)}(\alpha)=0$ اما $g^{(p)}(\alpha)\ne 0$ باشد آنگاه روش نقطه ثابت همگراست و داراي مرتبه همگرايي P به ازاي x_0 به اندازه كافي نزديك به α است .

اثبات : در حقيقت ازآنجا كه $g'(\alpha)=0<1$ مي باشد خود بيانگر آنست كه روش تكراري براي x_0 به حد كافي نزديك به α همگرا مي باشد. تنها نياز داريم سرعت همگرايي بالا را اثبات نمائيم. با استفاده از سري تيلور داريم :

$$g(x_n)=g(\alpha)+(x_n-\alpha)g'(\alpha)+\frac{1}{2}(x_n-\alpha)^2g''(\alpha)+...+\frac{(x_n-\alpha)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}_{g(\alpha)}+\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}g^{(p)}_{(\zeta_n)}$$

ζ_n بين x_n و α قرار دارد . با توجه به فرض مشتقات g(x) تا مرتبه (p-1) ام همه صفر هستند لذا نتيجه مي گيريم :

$$g(x_n)-g(\alpha)=\frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}g^{(p)}_{(\zeta_n)} \qquad \text{بنابراين :} \qquad \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}=\frac{1}{p!}g^{(p)}_{(\zeta_n)}$$

لذا نتیجه مي گیریم که سرعت همگرایي روش مرتبه p ام است .

مثال ۳-۸ : دنباله هاي تابعي ذیل را درنظر بگیرید :

الف : $$x_{n+1}=\frac{x_n(x^2{}_n+3a)}{3x^2{}_n+a}, x\geq 0$$

ب: $$x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{x^2{}_n}$$

مي خواهیم درصورت وجود مقدار همگرایي ومرتبه آنرا تعیین کنیم .

حل الف : براي دنباله الف ، $g(x)=\dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$ مي باشد وقتي که $n\to\infty$ درصورت وجود نقطه ثابت آن برابر α مي باشد $\alpha=\dfrac{\alpha(\alpha^2+3a)}{3\alpha^2+a}$. ونتیجه مي گیریم $\alpha=\sqrt{a}$ مي باشد ، پس دنباله به $\sqrt{a}$ همگراست هم چنین چون $g'(\sqrt{a})=g''(\sqrt{a})=0$ است و $g'''(\sqrt{a})\neq 0$ مي باشد دنباله الف همگرا به $\alpha=\sqrt{a}$ از مرتبه سوم است .

حل ب : براي دنباله تابعي ب داریم $g(x)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{x^2}$ وقتي که $n\to\infty$ نقطه ثابت آن درصورت وجود برابر $\alpha=\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{1}{\alpha^2}$ مي باشد در نتیجه $\alpha=\sqrt[3]{3}$ هم چنین چون $g'(\sqrt[3]{3})=0$ و $g''(\sqrt[3]{3})\neq 0$ مي باشد دنباله همگرا به $\sqrt[3]{3}$ است و از مرتبه دو مي باشد .

در بحث هاي پیش محدودیت $f'(\alpha)\neq 0$ اعمال کردیم اما اگر $f'(\alpha)$ همزمان با $f(x_n)$ به صفر میل کند مشکلاتي در روند بکارگیري روش نیوتن ایجاد مي شود براي مرتفع ساختن این مشکلات تعریف زیر را درنظر مي گیریم :

تعریف ۳-٤ : یك جواب α معادله $f(x)=0$ ریشه تكراري مرتبه m نامیده میشود هرگاه به ازاي $x \neq \alpha$ بتوانیم بنویسیم :

$f(x)=(x-\alpha)^m q(x)$ كه در اینجا : $\lim_{x \to \alpha} q(x) \neq 0$

قضیه ۳-۸ : $f \in C^1[a,b]$ یك ریشه ساده α در (a,b) دارد اگر و فقط اگر $f(\alpha)=0$ اما $f'(\alpha) \neq 0$

با توجه به مسائل فوق الذكر نتیجه مي گیریم كه چنانچه تابع f(x)=0 داراي ریشه تكراري باشد روش نیوتن رافسون از لحاظ همگرایي مشكل پیدا مي كند .بعنوان مثال چنانچه فرض كنیم f(x)=0 داراي m ریشه تكراري α باشد یعني : $f(x)=(x-\alpha)^m q(x)$

تابع $u(x)$ رابصورت زیر را درنظر مي گیریم : $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

بنابراین داریم :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{(x-\alpha)^m q(x)}{m(x-\alpha)^{m-1} q(x)+(x-\alpha)^m q'(x)} \\ &= (x-\alpha)\frac{q(x)}{mq(x)+(x-\alpha)q'(x)} \end{aligned}$$

لذا نتیجه مي گیریم كه u(x) نیز یك ریشه α خواهد داشت وچون $q(\alpha) \neq 0$ است بنابراین :

$$\frac{q(\alpha)}{mq(\alpha)+(\alpha-\alpha)q(\alpha)}=\frac{1}{m} \neq 0$$

پس u(x) یك ریشه ساده از مرتبه تكراري یك دارد بنابراین مي توان روش نیوتن را براي تابع u(x) بكاربرد یعني :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{u(x_n)}{u'x_n}$$

تمرين ها نقطه ثابت

۱- با استفاده از عمليات جبري نشان دهيد كه $f(x)=x^4+2x^2-x-3=0$ به هريك از اشكال زير داراي نقطه ثابت α مي باشد .

$$(a)\quad g_1(x)=(3+x-2x^2)^{\frac{1}{4}} \qquad (b)\quad g_2(x)=\left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(c)\quad g_3(x)=\left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (d)\quad g_4(x)=\left(\frac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1}\right)$$

۲- اگر هريك از توابع g در تمرين اول را با انتخاب $x_0=1$ وبه ازاي n=0,1,2,3 ؛ $x_{n+1}=g(x_n)$ درنظر بگيريم كدام تابع تقريب بهتري را از جواب بدست مي دهد ؟

۳- با استفاده از روش ثابت الگوريتم مناسبي براي معادله $x^4-3x^2-3=0$ در بازه [1,2] بيابيد و با استفاده از اين الگوريتم با دقت 10^{-2} جواب تقريبي را محاسبه كنيد درصورتيكه $x_0=1$ باشد .

٤- براي هريك از معادلات ذيل يك روش تكراري مناسب كه به جواب مثبت معادله همگرا شود بنويسيد و آنگاه جواب تقريبي را با دقت 10^{-5} بيابيد .

$$(a)\quad 3x^2-e^x=0 \qquad (b)\quad x-\cos x=0$$

$$(c)\quad x^2+10\cos x=0$$

٥- روش نقطه ثابت $x_{n+1}=1+e^{-x_n}$ رادرنظر بگيريد .نشان دهيد اين روش همگراست اگر $x_0\in[1,2]$ باشد .براي رسيدن به دقت 10^{-5} چند دور تكرار لازم است .

فصل چهارم

٤- درونيابي

در اين فصل به مسئله تقريب يك تابع داده شده بوسيله يك رده از توابع ساده تر كه عمداً چند جمله ايها هستند مي پردازيم .دو هدف عمده در استفاده از درونيابي با چندجمله اي هاي درونياب وجود دارد . هدف اول اينست كه تابعي را بازسازي مي كنيم بطور صريح داده نشده و تنها مقادير تابع (ويا مشتقات مراتب معيني از تابع) در مجموعه اي از نقاط معلوم مي باشد . نقاط را گره ها يا نقاط جدولي ويا شناسه ها ناميده ميشوند .هدف دوم اينست كه تابع f(x) را با چندجمله هاي درونياب p(x) جايگزين نمائيم .بطوريكه عمليات عامي نظير پيداكردن ريشه ها ، مشتق گيري و انتگرال گيري و غيره كه براي تابع f(x) مدنظر مي باشد بوسيله چندجمله اي p(x) عملي سازيم .

اهميت چند جمله اي ها در اينست كه توابع پيوسته رابطور يكنواخت تقريب مي كنند براي هر تابع پيوسته و تعريف شده دريك بازه بسته و كراندار ، يك چندجمله اي وجود دارد كه هرقدر بخواهيم به تابع مفروض نزديك است . اين نتيجه در قضيه ذيل بيان شده است .

قضيه ٤-١ : (قضيه تقريب وايرشتراس) :

فرض كنيد كه f بر [a ,b] پيوسته و تعريف شده باشد .به ازاي هر $\varepsilon > 0$ چندجمله اي مانند p(x) وجود دارد كه بر [a,b] تعريف شده است وداراي اين ويژگي است كه به ازاي هر $x \in [a,b]$ $\quad |f(x) - p(x)| < \varepsilon$

اثبات اين قضيه را مي توان درهركتاب آناليز حقيقي يافت .

تعريف ٤-١ : يك چند جمله اي p(x) را چندجمله اي درونياب ناميده مي شود اگر مقادير p(x) (ويا مقادير مراتب معيني از مشتقات

آن) بر مقادير تابع f(x) و(يا مقادير مراتب معيني از مشتقات تابع) .دريك نقطه ويا در تعدادي از نقاط جدولي منطبق باشد .
بعنوان مثال اگر چندجمله اي p(x) بسط سري تيلور تابع f(x) حول نقطه x_0 ، $x_0 \in [a,b]$ باشد در اين صورت

$$p(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + ... + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^n(x_0) \qquad (4.1)$$

آنگاه p(x) ممكن است يك چندجمله اي درونياب درجه n ناميده شود كه در شرايط :

$$p^{(k)}{}_{(x_0)} = f^{(k)}{}_{(x_0)} \ , \ k = 0(1)n \qquad (4.2)$$

صدق مي نمايد .

جمله ي : $R_n = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\zeta) \, , x_0 < \zeta < x$

كه در رابطه (2.1) ناديده گرفته شده است را باقيمانده ويا خطاي قطع كردن ناميده ميشود . تعداد جملات رابطه (2.1) ممكن است بوسيله دقت حل مسئله تعيين شوند .اگر خطاي $\varepsilon > 0$ معلوم باشد سري (2.1) در جمله $f^{(n)}{}_{(x_0)}$ قطع شود آنگاه :

$$\frac{1}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \left| f^{(n+1)}(\zeta) \right| \le \varepsilon$$

يا

$$\frac{1}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} M_{n+1} \le \varepsilon \qquad (4.3)$$

بطوريكه $M_{n+1} = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.براي يك ε داده شده در (4.3) مي توان n را تعيين نمود واگر n از پيش تعيين شود مي توان ε را تعيين كرد .هنگامي كه n وε هردو داده شده باشند رابطه (4.3) كران بالايي روي $(x\text{-}x_0)$ بدست ميدهد .

مثال ۴-۱ : براي تابع $f(x)=e^{-x}$ با استفاده از سري تيلور حول $x_0=0$ ، يك چند جمله اي p(x) را تقريب بزنيد و :

الف: چنانچه p(x) از چهارجمله اول بدست آمده باشد وخطاي تقريب بعد از راند كردن از 10^{-6} كمتر باشد آنگاه x را تعيين كنيد .

ب : براي $0\le x\le 1$ وبراي رسيدن به دقت 10^{-10} در تقريب تعداد جملاتي كه لازم مي باشد بيابيد .

حل الف :

$$f(x)=e^{-x} \Rightarrow f^{(r)}(x)=(-1)^r e^{-x}$$
$$f^{(r)}(0)=(-1)^r \quad ,r=0,1,\ldots$$

بنابراين از رابطه (4.3) داريم : $x^4 M_4 < 24\times 5\times 10^{-7}$

$$M_4=\max_{0\le x\le 1}\left|f^{(4)}(x)\right|=\max_{0\le x\le 1}\left|e^{-x}\right|=1$$

لذا داريم $x<0.06$ يا $x^4<120\times 10^{-7}$

حل ب: از رابطه (4.3) داريم $\frac{1}{(n+1)!}<5\times 10^{-11}$ با حل رابطه فوق داريم : $n\ge 14$

استفاده از چند جمله اي تيلور در مورد تقريب توابع پيوسته عملي است اما كارايي وسيعي ندارند زيرا هرچند كه چندجمله اي هاي تيلور هرقدر كه ممكن باشد و به تابع داده شده در نقطه اي معين منطبق باشد ، ولي دقت آنها در مورد تقريب توابع در نزديكي همان نقطه ايست كه حول آن بسط داده شده اند . يك چندجمله اي درونياب مناسب تقريبي نسبتاٌ دقيق را در تمام طول يك بازه بدست ميدهند .عموماً چندجمله ايهاي تيلور اين كار را نمي كنند . مثال زير ضعف چند جمله ايهاي تيلور را در تقريب نشان ميدهد .

مثال ۴-۲ : چند جمله ايهاي تيلور را با درجات مختلف براي تقريب $f(3)=\frac{1}{3}$ درنظر مي گيريم . تابع مورد نظر $f(x)=\frac{1}{x}$ است كه

چندجمله اي هاي تيلور حول $x_0=1$ بسط مي دهيم
چون. $f(x)=x^{-1}, f'(x)=-x^{-2}, f''(x)=(-1)^2 2x^{-3}$ وبطور كلي $f^{(k)}(x)=(-1)^k k! x^{-k-1}$
است .بنابراين چند جمله اي درجه n تيلور عبارتست از :

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(x-1)^k$$

حال اگر بخواهيم $f(3)=\frac{1}{3}$ را با استفاده از $p_n(3)$ و به ازاي مقادير صعودي n بدست آوريم درمي يابيم كه تغييرات آنها فاحش هستند . مقادير را در جدول زير آورده ايم .

N	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	−1	3	−5	11	−21	43	-85

با توجه به جدول فوق درمي يابيم كه چندجمله ايهاي تيلور داراي اين ويژگي هستند كه تمام اطلاعات مورد استفاده در تقريب فقط در نقطه x_0 متمركز شده اند . عموماً اين مشكل استفاده از چندجمله اي هاي تيلور را محدود به مواردي مي كند كه تنها نياز به تقريبهايي در نقاط نزديك به x_0 است .براي مقاصد محاسباتي معمولاً بهتر است كه از روشهايي استفاده شود كه شامل اطلاعاتي از نقاط مختلف باشند .

درحالت كلي اگر (n+1) نقطه متمايز $a \le x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n \le b$ را داشته باشيم مسئله ما يافتن p(x) است كه در شرايط درونيابي ذيل صدق مي نمايد :

$(i) \quad p(x_i)=f(x_i) \quad ,i=0(1)n$ (4.4)

$(ii) \quad p(x_i)=f(x_i)$ (4.5)

$p^{(k)}(x_i)=f^{(k)}(x_i)\,, k=0,1,...m_i \;,\; i=0(1)n$

شرط (4.4) چند جمله اي درونياب لاگرانژ را نتيجه ميدهد و چنانچه شرط (4.5) را بكارگيريم و $m_i=1$ باشد چندجمله اي درونياب

«هرميت» را داريم و چنانچه مشتقات مراتب بالاتر در رابطه (4.5) را مدنظر قرار دهيم چندجمله اي هاي درونياب «بوسان» (Osculating Polynomial)که تعميمي از چندجمله ايهاي تيلور و چندجمله ايهاي لاگرانژ است بدست خواهد داد .

۲-٤ درونيابي هاي لاگرانژ و نيوتن

فرض مي كنيم تابع f(x) بر بازه [a,b] پيوسته باشد و همچنين فرض مي كنيم كه (n+1) نقطه مجزا $a \le x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n \le b$ دربازه [a,b] را درنظر مي گيريم . فرض مي كنيم مقادير تابع f(x) درنقاط فوق معلوم باشند.ما درصدديافتن چندجمله اي :

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \qquad (4.5)$$

هستيم كه در شرايط درونيابي $i = 0(1)n$ $p(x_i) = f(x_i)$ صدق مي نمايد .حال چندجمله اي p(x) موجود است اگر دترمينان «واندرمور» ذيل ناصفرباشد:

$$v(x_0, x_1, ... x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x^2 & . & . & . & x_0{}^n \\ 1 & x_1 & x_1{}^2 & & & & x_1{}^n \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ 1 & x_n & x_n{}^2 & . & . & . & x_n{}^n \end{vmatrix} \ne 0$$

رابطه فوق مخالف صفر است چون كه x_i ها مجزا هستند ، يعني در رابطه (4.5) با استفاده از شرايط درونيابي مي توان $a_0, ..., a_n$ را بدست آورد .يعني p(x) وجود دارد . حال در ذيل بايستي ثابت كنيم كه p(x) منحصربفرد است .فرض مي كنيم كه براي (n+1) نقطه متمايز فوق دو چند جمله اي نظير p(x) و q(x) موجود باشد بطوريكه در شرايط :

$$p(x_i) = f(x_i) \ , \ i = 0(1)n$$
$$q(x_i) = f(x_i) \ , \ i = 0(1)n \qquad (4.6)$$

صدق مي نمايد . چند جمله اي زير را درنظر مي گيريم :

$$Q(x) = p(x) - q(x) \qquad (4.7)$$

چون p(x) و q(x) چندجمله اي هاي ماكزيمم درجه n مي باشند آنگاه Q(x) نيز يك چند جمله اي درجه حداكثر n مي باشد و در شرايط (4.6) صدق مي نمايد .

$$Q(x) = p(x_i) - q(x_i) \quad , \quad i = 0(1)n \qquad (4.8)$$

بنابراين Q(x) يك چند جمله اي است كه درجه آن حداكثر n مي باشد . لذا با توجه به رابطه (4.8) ، Q(x) داراي (n+1) ريشه $x_0,x_1,\dots x_n$ است . اما ما مي دانيم كه Q(x) يك چند جمله اي حداكثر از درجه n است و بايستي داراي n ريشه باشد (چه بصورت حقيقي يا مختلط ويا تعدادي تكراري) . لذا نتيجه مي گيريم كه متناقض مي باشد و نتيجه مي گيريم كه : $Q(x) \equiv 0$

باشد .بنابراين p(x)=q(x) مي باشد . واين بمعناي منحصربفرد بودن چندجمله اي هاي درونياب است .

بنابراين چندجمله اي درونياب كه به دو طريق متفاوت بدست مي آيند ممكن است در فرم متفاوت باشند اما مشابه همديگر هستند . از لحاظ شكل ، چندجمله اي هاي درونياب ، چندجمله اي لاگرانژ ويا نيوتن با تفاضل تقسيم شده ناميده ميشوند .كه در قسمتهاي بعدي بدانها مي پردازيم .

٤-٣ درون يابي لاگرانژ

فرض مي كنيم تابع f(x) در فاصله [a,b] پيوسته باشد و همچنين فرض كنيم كه (n+1) نقطه مجزا در اين فاصله بصورت زير داريم كه الزاماً متساوي الفاصله نيستند : $a \le x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n \le b$

و مقادير تابع f(x) در اين نقاط معلوم مي باشند .ما درصدد يافتن چندجمله اي درجه n ام ، $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$ هستيم كه در شرايط زير صدق كند :

$$p(x_i) = f(x_i) \ , \ i = 0(1)n$$

براي آساني كار ، ابتدا حالت خطي آن را درنظر مي گيريم .

درون يابي خطي : α_0, α_1 مقادير ثابت هستند و درفاصله [x0,x1] داريم :

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \qquad (4.9)$$
$$P(x_0) = f(x_0) = \alpha_0 + \alpha_1 x_0 \qquad (4.10)$$
$$P(x_1) = f(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 \qquad (4.11)$$

$$\begin{vmatrix} p(x) & 1 & x \\ f(x_0) & 1 & x_0 \\ f(x_1) & 1 & x_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ (حول سطر اول بسط مي دهيم)

$$p(x)(x_1 - x_0) - f(x_0)(x_1 - x) + f(x_1)(x_0 - x) = 0$$

$$p(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) f(x_1)$$

جملات اساسي لاگرانژ عبارتند از :

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \& \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$
$$P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

جملات اساسي لاگرانژ داراي خاصيت ذيل هستند :

$$\left. \begin{array}{l} L_0(x_0) = 1 \ \& \ L_0(x_1) = 0 \\ L_1(x_1) = 1 \ \& \ L_1(x_0) = 0 \end{array} \right\} \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \ , & i = j \\ 0 \ , & i \ne j \end{cases}$$

اكنون درصدد يافتن يك چند جمله اي درجه n هستيم كه از تمامي نقاط فوق بگذرد ، اين چند جمله اي تقريبي براي يافتن f(x) است و

در نقاط فوق الذكر تابع f(x) و چند جمله اي p(x) برهم منطبق هستند ، يعني :

$$f(x_i) = p(x_i) \ , \ i = 0,1,...,n$$

با تعميم حالت خطي چند جمله اي اساسي لاگرانژ درحالت كلي را اين چنين تعريف مي كنيم :

$$L_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)$$
$$= C_i \prod_{\substack{j=0 \\ \& j \neq i}}^{n} (x - x_j)$$

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \quad , \quad i = 0,1,...,n$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

جملات اساسي لاگرانژ داراي خاصيت : $L_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ \& j \neq i}}^{n} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} = 1$

هستند .

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \quad , \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)}$$

٤-٤ خطاي قطع كردن :

مي دانيم كه اگر $x=x_0$ يا $x=x_1$ باشد آنگاه :

$$E_1(f,x) = f(x) - p(x) = 0$$
$$E_1(f,x) = 0$$

اما اگر $x \in [a,b]$ و x_1 و $x \neq x_0$ ، براي اين x ما يك تابع g(t) را چنين تعريف مي كنيم :

$$g(t) = f(t) - p(t) - [f(x) - p(x)] \frac{(t - x_0)(t - x_1)}{(x - x_0)(x - x_1)} \qquad (4.12)$$

به آساني مي توان دريافت كه g(t)=0 در $(t=x \ , \ t=x_0 \ , t=x_1)$ است. از رابطه (4.12) دوبار نسبت به t مشتق مي گيريم :

$$g'(t) = f'(t) - p'(t) - [f(x) - p(x)]\left\{\frac{t - x_1 + t - x_0}{(x - x_0)(x - x_1)}\right\}$$

$$g''(t) = f''(t) - [f(x) - p(x)]\left\{\frac{2}{(x - x_0)(x - x_1)}\right\}$$

با استفاده از قضيه رول اگر g(t) در فاصله $[x_0,x_1]$ پيوسته و در (x_0,x_1) مشتق پذير باشد و اگر $g(x) = g(x_1) = g(x_0) = 0$ پس حداقل يك نقطه مانند ζ_1 در فاصله (x_0,x_1) موجود است بطوريكه $g''(\zeta) = 0$

$$0 = f''(\zeta) - (f(x) - p(x))\frac{2}{(x - x_0)(x - x_1)}$$

حال رابطه بالارا حل مي كنيم :

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1)f''(\zeta) \quad \& \quad \min(x_0, x_1, x) < \zeta < \max(x_0, x_1, x)$$

اگر فرض كنيم

$$M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_1} |f''(x)|$$

باشد ، داريم :

$$|E_1(f,x)| = \left|\frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1)f''(\zeta)\right|$$

$$|E_1(f,x)| \le \frac{1}{2}\max_{x_0 \le x \le x_1}|(x - x_0)(x - x_1)|.M_2$$

بنابراين عبارت $|(x - x_0)(x - x_1)|$ در نقطه $x = \frac{(x_0 + x_1)}{2}$ ماكزيمم است .يعني :

$$\begin{aligned}|E_1(f,x)| &\le \frac{1}{2}\left|\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0\right)\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1\right)\right|.M_2 \\ &\le \frac{1}{2}\left|\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)\right|.M_2 \\ &\le \frac{1}{8}(x_1 - x_0)^2 M_2 \qquad (4.13)\end{aligned}$$

اگر x ها متساوي الفاصله باشند : $|E_1(f,x)| \le \frac{h^2}{8}M_2$

بنابراين براي حالت كلي داريم :

$$E_n(f,x)=\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\zeta)\ ,\ \min\{x_0,x_1,...,x_n,x\}<\zeta<\max\{x_0,x_1,...,x_n,x\}$$

$$\left|E_n(f,x)\right|\le\max\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|.M_{n+1}$$

$$x_0\le x\le x_n$$

$$M_{n+1}=\max\left|f^{(n+1)}(x)\right|\ ,\ x\in\{x_0,x_1,...,x_n\}$$

حال داريم :

$$\left|x-x_i\right|\le\left|x_n-x_0\ \ ,i=0(1)n\right|$$

$$\left|E_n(f,x)\right|\le\frac{\left|x_n-x_0\right|^{(n+1)}}{(n+1)!}M_{n+1}\tag{4.14}$$

مثال ٤-٣ : با استفاده از فرمول لاگرانژ وبا استفاده از اينكه $\sin(0.1)=0.09983$ و $\sin(0.2)=0.19867$ يك مقدار براي $\sin(0.14)$ بيابيد و خطا را محاسبه كنيد .

راه حل اول :

$$p(x)=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)$$

$$p(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

$$=\frac{x-0.2}{0.1-0.2}\times(0.09983)+\frac{x-0.1}{0.2-0.1}(0.19867)$$

$$p(0.14)=0.139366$$

$$\left|E_1(f,x)\right|\le\frac{1}{8}(0.2-0.1)^2.\left|f''(x)\right|,\ x\in[x_0,x_1]$$

$$\le\frac{1}{8}(0.1)^2\times1=0.0025$$

مثال ٤-٤ : براي داده هاي زير يك چندجمله اي درونياب را بيابيد :

x	0	1	2	5
f(x)	2	3	12	147

$$p(x)=\sum_{i=0}^{3}L_i(x)f(x_i)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x)}f(x_0)+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)$$

$$p(x)=2\,.\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)}+3\times\frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)}+12\frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)}+$$

$$147\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)}$$

$$p(x)=x^3+x^2-x+2$$

مثال ٤-٥: sin(x) را از داده هاي زيرين با فرمول لاگرانژ درونيابي شده ، به ازاي چه مقادير n مي توانيم مطمئن شويم كه خطاي قطع كردن كمتر از (0.5×10^{-4}) است ؟

$$x_0=1$$

$$x_1=0.9$$

$$x_2=0.8$$

$$x_n=1-(0.1\times n)$$

$$E_n(f,x)=\frac{|x_n-x_0|^{(n+1)}}{(n+1)!}\times\left|f^{(n+1)}(\zeta)\right|\ ,\ \min\{x_0,x_1,...,x_n,x\}<\zeta<\max\{x_0,x_1,...,x_n,x\}$$

$$\left|E_n(f,x)\right| \le \frac{\left|x_n - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} \times \left|f^{(n+1)}(\zeta)\right| \le 0.5\times 10^{-4}$$

$$f(x)=\sin(x)\ \begin{cases} \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\left|\sin x\right|) = \left|\sin x\right| \\ \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\left|\sin x\right|) = \left|\cos x\right| \end{cases}$$

اگر n فرد باشد داریم : اگر n زوج

$$\left|E_n(f,x)\right| \le \frac{\left|1-(0.1\times n)-1\right|^{n+1}}{(n+1)!} \le 0.5\times 10^{-4}$$

$$\frac{(0.1\times n)^{n+1}}{(n+1)!} \le 0.5\times 10^{-4} \Rightarrow n=7$$

مثال ٤-٦ : تابع $f(x)=\ln(1+x)$ ، $x_0=1$ ، $x_1=1.1$ مفروضند . با استفاده از درون یابي خطي مقدار مناسب $f(1.04)$ را محاسبه وحد بالاي خطا را بیابید :

$$f(x)=\ln\ (1+x)\ ,\ f(1)=\ln\ 2=0.301030\ ,\ f(1.1)=\ln\ (2.1)=0.322219$$

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

$$=\frac{x-1.1}{1.0-1.1}\times 0.301030+\frac{x-1}{1.1-1}\times 0.322219$$

$$p_1(1.04)=0.304506$$

$$E(f,x)=\frac{1}{2!}(x-x_0)(x-x_1)f''(C)\ ;\ x_0<c<x_1$$

ماکزیمم $(x-x_0)(x-x_1)$ در نقطه $x=(x_0+x_1)/2$ مي باشد .

$$\left|E(f,x)\right| \le \frac{1}{2}\max_{1\le x\le 1.1}\ \left|(x-x_0)(x-x_1)\right| . \max_{1\le x\le 1.1} |f''(x)|$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$\left|E(f,x)\right| \le \frac{1}{8}(x_1-x_0)^2\ \max\left|\frac{-1}{(1+x)^2}\right| = \frac{1}{8}(0.1)^2\times\frac{1}{4}=\frac{0.01}{32}=\frac{1}{3200}$$

مثال ٤-٧ : مقدار مناسب گام (h) را که براي ايجاد جدول مقادير تابع $f(x)=(1+x)^6$ روي فاصله [0,1] لازم است بطريقي بيابيد که حد بالاي خطاي درونيابي خطي (5×10^{-5}) باشد :

$$|E_1(f,x)| \le \frac{h^2}{8}M$$

$$M = \max_{0<x\le1} |f''(x)| = \max_{0\le x\le1} |30(1+x)^4| = 480$$

بيشترين مقدار h عبارتست از :

$$|E_1(f,x)| \le \frac{h^2}{8}\times 480 \le 5\times10^{-5}$$

$$60h^2 \le 0.00005 \Rightarrow h \approx 0.00091$$

مثال ٤-٨ : چند جمله اي منحصربفرد p(x) بادرجه ٢ يا کمتر را بيابيد بطوريکه p(4)=64 و p(3)=27 و p(1)=1 باشد . با استفاده از فرمول لاگرانژ و نيوتن مقدار تابع در (x=1.5) را بيابيد :

$$P_2(x)=\frac{(x-4)(x-3)}{(1-4)(1-3)}(1)+\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)}\times27+\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)}\times64=8x^2-19x+12$$

$$p_2(1.5)=1.5$$

٤-٥ تفاضلات تقسيم شده نيوتن

فرض مي کنيم $x_0<x_1<x_2 \ldots <x_{n-1}<x_n$ ، (n+1) نقطه متمايز باشند و نامتساوي الفاصله باشند و مقدار تابع f(x) بـــــه ازاي نقاط

فوق معلوم باشند $f_0,f_1,\ldots,f_n$. دراين صورت مفهوم تفاضل تقسيم شده را در زير تعريف مي كنيم :

تفاضل‌تقسيم شده مرتبه اول عبارتست از :

$$f[x_i,x_{i+1}]=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\quad ,\quad i=0(1)n-1$$

تفاضل تقسيم شده مرتبه دوم :

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}\quad i=0(1)n-2$$

وتفاضل تقسيم شده مرتبه n ام :

$$f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+n}]=\frac{f[x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{i+n}]-f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+n-1}]}{x_{i+n}-x_i},i=0$$

نكته اي كه بايستي اشاره كنيم اينست كه تقدم و تأخر x_i ها در نماد تفاضل تقسيم شده تأثيري ندارد مانند :

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=f[x_1,x_0]$$

حال به بررسي چندجمله اي درونياب تفاضل تقسيم شده نيوتن مي پردازيم :

٤-٦ فرمول درونياب تفاضل تقسيم شده نيوتن

فرض مي كنيم مقادير تابع f(x) به ازاي نقاط نامتساوي الفاصله $x_0,x_1,\ldots,x_n$ يعني $f_0,f_1,\ldots,f_n$ باشند.

ما در صدد يافتن يك چندجمله اي درجه n ام ، $P_n(x)$ براي تقريب $f(x)$ هستيم كه درشرايط زير صدق كند :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0(1)n \qquad (4.15)$$

$$P_n(x) = a_0 + (x - x_0)a_1 + (x - x_0)(x - x_1)a_2 + ... + (x - x_0)...(x - x_{n-1})a_n \qquad (4.16)$$

$$if \quad x = x_0 \quad \Rightarrow \quad P_n(x) = a_0 = f(x_0)$$

$$P_n(x) - f(x_0) = (x - x_0)a_1 + (x - x_0)(x - x_1)a_2 + ... + (x - x_0)...(x - x_{n-1})a_n \qquad (4.17)$$

حال اگر طرفين رابطه ٣ را بر $x\text{-}x_0$ تقسيم كنيم خواهيم داشت :

$$\frac{p_n(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + (x - x_1)a_2 + ... + (x - x_1)...(x - x_{n-1})a_n$$

$$if \quad x = x_1 \Rightarrow \frac{p_n(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \qquad (4.18)$$

اگر به همين ترتيب عمل كنيم درمي يابيم كه :

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

.

.

.

$$a_n = f[x_0, x_1, x_2 ..., x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} \qquad (4.19)$$

بنابراين با استفاده از رابطه (4.19) در (4.16) چندجمله اي درونياب تفاضل تقسيم شده نيوتن بصورت زير خواهيم داشت :

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] + ...$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n] \qquad (4.20)$$

يا :

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_i](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})$$

در جدول زير تفاضلات تقسيم شده براي نقاط داده شده آورده شده است :

x	f(x)	تفاضل تقسيم شده مرتبه اول	ت .ت .مرتبه دوم	ت . ت . م . سوم
x_0	f_0	$f[x_0,x_1]=\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
x_1	f_1	$f[x_1,x_2]=\dfrac{f_2-f_1}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	f_2	$f[x_2,x_3]=\dfrac{f_3-f_2}{x_3-x_2}$	$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
x_3	f_3			

مثال ٤-٩ : چندجمله اي درونياب درجه $n\le 2$ را بيابيد بطوريکه :

$$f(0)=1\ ,\ f(1)=3\ ,\ f(3)=55$$

از روش تفاضل تقسيم شده نيوتن استفاده کنيد .

حل : جدول تفاضل تقسيم شده عبارتست از :

x	f(x)	ت . ت . م.اول	ت . ت . م.دوم
0	1	$\dfrac{3-1}{1-0}=2$	$\dfrac{26-2}{3-0}=8$
1	3	$\dfrac{55-3}{3-1}=26$	
3	55		

$$p_2(x)=f[0]+(x-0)f[0,1]+(x-0)(x-1)f[0,1,3]$$
$$p_2(x)=1+2x+8x(x-1)=8x^2-6x+1$$

اگر مثال فوق را با روش لاگرانژ حل کنیم مسلماً همین چندجمله درجه دوم را بایستي بیابیم زیرا چندجمله ایهاي درونیاب علیرغم تفاوت شکل آنها یکسان و متشابه هستند .

حل با لاگرانژ :

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}=\frac{1}{3}(x-1)(x-3)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}=-\frac{1}{2}(x)(x-3)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(7-0)(3-1)}=\frac{1}{6}(x)(x-1)$$

چندجمله اي درونیاب لاگرانژ عبارتست از :

$$P_2(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{3}(1)-\frac{x(x-3)}{2}(3)+\frac{1}{6}x(x-1)(55)=8x^2-6x+1$$

مثال ٤-١٠: براي داده هاي جدولي زیر با استفاده از روش تفاضل تقسیم شده نیوتن تقریبي براي f(1.5) بیابید .

x	1	1.3	1.6	1.9	2.2
	0.7651977	0.6200860	0.4554022	0.2818186	0.1103623

حل : ابتدا جدول تفاضلي تقسیم شده را تشکیل مي دهیم :

	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1},x_i]$	ت.ت.م دوم	ت.ت.م.سوم	ت.ت.م.چهارم
x_0	1	0.7651977	-0.4837057	-0.1087339	0.0658784	
			-0.5489460	-0.0494433		0.0018251
x_1	1.3	0.6200860	-0.5786120	0.0118183	0.0680685	
x_2	1.6	0.4554023	-0.5715210			
x_3	1.9	0.2818186				

x_4	2.2	0.1103623				

$$p_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1) - 0.1087339(x-1)(x-1.3) + 0.0658784(x-1)(x-1.3)(x-1.6)$$
$$+ 0.0018251(x-1)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9)$$
$$f(1.5) \approx p_4(1.5) = 0.5118200$$

توضيح اينكه تابعي كه مقادير آن در جدول فوق داده شده است تابع بسل نوع اول وبا مرتبه صفر يعني $J_0(x)$ است كه مقدار واقعي ان در 1.5 برابراست با : $J_0(1.5) = 0.5118277$

لذا خطاي مطلق تقريب عبارت است از : $|p_4(1.5) - f(1.5)| \approx 7.7 \times 10^{-6}$

در بخش بعدي قبل از پرداختن به روشهاي متساوي الفاصله نيوتن ابتدا تفاضلات متناهي و عملگرهاي آنرا بررسي مي كنيم .

٤-٧ تفاضلهاي متناهي :

مقادير متساوي الفاصله $x_0, x_1, \ldots, x_n$ با گام h مفروض هستند ومقادير f(x) به ازاي اين نقاط معلوم مي باشند.حال در زير به تعريف نمادها (عملگرهاي) زير مي پردازيم :

$$x_j = x_0 + jh \qquad j = 0(1)n$$

١) عملگر تفاضل پيشرو The Forward Difference Operator

$$\Delta f(x_j) = f(x_j + h) - f(x_j) = f_{j+1} - f_j \quad , \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

٢) عملگر تفاضل پسرو The Backward Difference Operator

$$\nabla f(x_j) = f(x_j) - f(x_j - h) = f_j - f_{j-1} \quad , \quad j = n, n-1, \ldots, 1$$

٣) عملگر تفاضل مركزي The Central Difference Operator

$$\delta\ f(x_j) = f(x_j + h/2) - f(x_j - h/2) = f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}$$

٤) عملگر ميان گيري The Avraging Operator

$$\mu f(x_j)=\frac{1}{2}[f(x_j+h/2)+f(x_j-h/2)]=\frac{1}{2}[f_{j+\frac{1}{2}}+f_{j-\frac{1}{2}}]$$

۵) عملگر انتقال The Shift Operator

$$Ef(x_j)=f(x_j+h)$$

۶) عملگر انتقال معکوس $E^{-1}(f(x_j))=f(x_j-h)$

با تکرار عملگرهاي فوق تفاضلات مراتب بالاتر را خواهيم داشت اما ابتدا رابطه بين عملگرهاي فوق را تعيين مي كنيم و سپس تفاضلات مراتب بالاتر را به آساني مي توان نتيجه گرفت .

مثال ۴-۱۱ : رابطه بين عملگرها در زير را ثابت كنيد :

$(a)\quad \Delta f_j=\nabla f_{j+1}=\delta\ f_{j+\frac{1}{2}}$

$(b)\quad \Delta\equiv E-1$

$(c)\quad \nabla\equiv 1-E^{-1}$

$(d)\quad \delta\equiv E^{1/2}-E^{-1/2}$

$(e)\quad \mu\equiv\frac{1}{2}(E^{1/2}+E^{-1/2})$

حل (a)

$$\Delta\ f_j=\Delta f(x_i)=f(x_j+h)-f(x_j)=f_{j+1}-f_i$$
$$\nabla\ f_{j+1}=\nabla f(x_j+h)=f(x_j+h)-f(x_j)=f_{j+1}-f_j$$
$$\delta\ f_{j+\frac{1}{2}}=\delta\ f(x_i+h/2)=f(x_j+h)-f(x_j)=f_{j+1}-f_j$$
$$\Delta\ f_i\equiv\nabla f_{j+1}\equiv\delta\ f_{j+\frac{1}{2}}$$

لذا نتيجه مي گيريم كه : $\Delta\ f_j\equiv\nabla f_{j+1}\equiv\delta\ f_{j+1/2}$

$$\Delta f(x_j) = f(x_j+h) - f(x_j) = Ef(x_j) - f(x_i) \qquad (b)$$
$$= (E-1)f(x_j)$$
$$\therefore \Delta \equiv E-1$$
$$\nabla f(x_j) = f(x_j) - f(x_j-h) = f(x_j) - E^{-1}f(x_j) \qquad (c)$$
$$= (1-E^{-1})f(x_j)$$
$$\because \nabla \equiv (1-E^{-1})$$
$$\delta\, f(x_j) = f(x_j+h/2) - f(x_j-h/2) = E^{1/2}f(x_j) - E^{-1/2}f(x_j) \qquad (d)$$
$$= (E^{1/2}-E^{-1/2})f(x_j)$$
$$\because \delta \equiv (E^{1/2}-E^{-1/2})$$

رابطه (e) نيز نظير رابطه (d) مي توان ثابت كرد .با استفاده از روابط فوق مي توان تفاضلات مراتب بالاتر را يافت .

تفاضل پيشرو مرتبه n ام :

$$\Delta \equiv E-1 \Rightarrow \Delta^n = (E-1)^n = E^n(1-\frac{1}{E})^n = E^n\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}E^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}E^{n-k}$$
$$\Delta^n f(x_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}E^{n-k}f(x_j)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}f_{j+n-k}$$

يعني $\Delta^n f(x_j)$ را مي توان بصورت يك تركيب خطي $f_j, f_{j+1}, \ldots, f_{j+k}$ بيان نمود وضرائب ، همان ضرائب دوجمله اي با علامتهاي متناوب مي باشد :

تفاضل پسرو مرتبه n ام :

$$\nabla^n = (1-E^{-1})^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}E^{-k}$$
$$\nabla^n f(x_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}E^{-k}f(x_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}f_{j-k}$$

نشان مي دهد كه $\nabla^n f_j$ را مي توان بصورت يك تركيب خطي $f_j, f_{j-1}, \ldots, f_{j-k}$ بيان نمود .

تفاضل مرکز مرتبه n ام :

$$\delta^n = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})^n = E^{\frac{n}{2}}(1-E^{-1})^n = E^{\frac{n}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}E^{-k}\right\}$$

$$\delta^n f(x_j) = E^{\frac{n}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}E^{-k}\right\}f(x_j)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}E^{\frac{n}{2}-k}f(x_j)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f_{j+\frac{n}{2}-k}$$

نشان مي دهد كه $\delta^n f_j$ را مي توان بعنوان يك تركيب خطي از $f_{j+\frac{n}{2}},\ldots,f_j,\ldots,f_{j-\frac{n}{2}}$ بيان نمود .

۱)جدول تفاضل پيشرو

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0				
x_1	f_1	$f_1 - f_0 = \Delta f_0$			
x_2	f_2	$f_2 - f_1 = \Delta f_1$	$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	$f_3 - f_2 = \Delta f_2$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	$f_4 - f_3 = \Delta f_3$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

جدول تفاضل پسرو

x	f(x)	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$

x_0	f_0				
x_1	f_1	$f_1 - f_0 = \nabla f_1$			
x_2	f_2	$f_2 - f_1 = \nabla f_2$	$\nabla f_2 - \nabla f_1 = \nabla^2 f_2$		
x_3	f_3	$f_3 - f_2 = \nabla f_3$	$\nabla^2 f_1$	$\nabla^3 f_3$	
x_4	f_4	$f_4 - f_3 = \nabla f_4$	$\nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_4$	$\nabla^4 f_4$

رابطه بين عملگرهاي تفاضلي را مي توان در جدول زير خلاصه كرد :

	E	Δ	∇	δ
E	E	$\Delta + 1$	$(1-\nabla)^{-1}$	$1+\delta^2/2+\delta\sqrt{(1+\delta^2/4)}$
Δ	E-1	Δ	$(1-\nabla)^{-1}-1$	$\delta^2/2+\delta\sqrt{(1+\delta^2/4)}$
∇	1-E^{-1}	$1-(1+\Delta)^{-1}$	∇	$-\delta^2/2+\delta\sqrt{(1+\delta^2/4)}$
δ	E$^{1/2}$-E$^{-1/2}$	$\Delta(1+\Delta)^{-1/2}$	$\nabla(1-\nabla)^{-1/2}$	δ
μ	$\frac{1}{2}(E^{1/2}+E^{-1/2})$	$(1+\Delta/2)(1+\Delta)^{1/2}$	$(1-\Delta/2)(1-\nabla)^{-1/2}$	$\sqrt{(1+\delta^2/4)}$

٤-٨ چندجمله ايهاي درونياب مبتني بر تفاضلات متناهي

درونيابي تفاضل پيشرو نيوتن -گريگوري(Gregory-Newton) :

فرمول تفاضل پيشرو نيوتن :

$$p(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n f_0 \qquad (4.21$$

رابطه (4.21) فرمول درونياب پيشرو نيوتن-گريگوري ناميده مي شود . اگر در (4.21) $\frac{x-x_0}{h}=u$ قرار دهيم رابطه زير را خواهيم داشت :

$$P(x_0+uh) = f_0 + u\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{u}{i} \Delta^i f_0 \qquad (4.22)$$

خطاي اين روش عبارتست از :

$$E_n(f,x) = \frac{u(u-1)...(u-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\zeta) \qquad (4.23)$$

الترناتيو ديگر براي ارائه رابطه (4.21) بشرح زير مي باشد.

$$f(x) = f(x_0 + \frac{x-x_0}{h} h) = f(x_0 + uh) = E^u f(x_0)$$
$$= (1+\Delta)^u f(x_0)$$
$$= f_0 + u\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + ... + \frac{u(u-1)(........(u-n+1)}{n!} \Delta^n f_0 + ...$$

با ناديده گرفتن تفاضل پيشرو مرتبه (n+1) ومراتب بالاتر آن همان چندجمله اي درونياب رابطه (4.21) را خواهيم داشت .

درونيابي تفاضل پسرو نيوتن-گريگوري

چندجمله اي درونياب تفاضل پسرو بصورت زير خواهيم داشت :

$$f(x) = f(x_n + \frac{x-x_n}{h} h) = f(x_n + uh) = E^u f_n$$
$$= (1-\nabla)^{-u} f_n = f_n + u\nabla f_n + \frac{u(u+1)}{2!} \nabla^2 f_n + ... + \frac{u(u+1)...(u+n-1)}{n!} \nabla^n f_n + ...$$

بطوريكه $\frac{x-x_n}{h} = u$ مي باشد .

حال اگر در رابطه فوق از تفاضلات $\nabla^{n+1} f_n$ ومراتب بالاتر آن صرف نظر كنيم .چندجمله اي درونياب پسرو نيوتن را خواهيم داشت :

$$P(x_n+uh)=f_n+u\nabla f_n+\frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f_n+...+\frac{u(u+1)...(u+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{-u}{i}\nabla^i f_n$$

خطاي آن عبارتست از :

$$E_n(f,x)=\frac{u(u+1)...(u+n)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\zeta) \qquad (4.24)$$

مثال ٤-١٢: براي داده هاي جدولي زير تفاضلات متناهي را بيابيد .چند جمله اي درونياب پيشرو و پسرو نيوتن را بيابيد . در x=0.25 و x=0.35 ، f(x) را درونيابي كنيد .

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

حل :جدول تفاضلي را تشكيل ميدهيم :

x_i	f(x)	ت. م. اول	ت. م. دوم	ت. م. سوم	ت. م. چهارم
0.1	1.40				
		0.16			
0.2	1.56		0.04		
		0.20		0	
0.3	1.76		0.04		0
		0.24		0	
0.4	2.00		0.04		
		0.28			
0.5	2.28				

چندجمله اي درونياب پيشرو عبارتست از :

$$P(x)=1.4+(x-0.1)\frac{0.16}{0.1}+\frac{(x-0.1)(x-0.2)}{2}.\frac{0.04}{0.01}=2x^2+x+1.28$$

چند جمله اي درونياب پسرو نيوتن نيز بصورت زير داريم :

$$P(x)=2.28+(x-0.5)\frac{0.28}{0.1}+\frac{(x-0.5)(x-0.4)}{2}.\frac{0.04}{0.01}=2x^2+x+1.28$$

هردوچند جمله اي يكسان و مشابه هستند .بنابراين چنانچه بخواهيم f(0.25) را بيابيم داريم :

$$f(0.25) = p(0.25) = 1.655$$
$$f(0.35) = p(0.35) = 1.875$$

فرمول درونیاب درجه دوم یك كران بالاي خطاي آنرا بیابید .

مثال ٤-١٤: معادله $f(x) = \sin x$ مفروض است . $f(0.2) = 0.19867, f(1) = 0.09983$ داده شده است .با استفاده از درونیابي خطي f(0.16) را محاسبه و خطا در f(0.16) را بیابید .

x	x(x)
0.1	0.09983
0.2	0.19867

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$
$$P(x) = \frac{0.16 - 0.2}{0.1 - 0.2} + \frac{0.16 - 0.1}{0.2 - 0.1} \times 0.19867 = 0.159134$$

$$E(f, x) = \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} \max \left| f''(t) \right| \ ; \ x_0 \le t \le x_1$$
$$E(f, x) = \frac{(0.2 - 0.1)^2}{2} \times 0.19867 = 0.00099335$$

٤-١٠ درونیابي اسپلاین مكعي

براي رسیدن به نتایج دقیق تر در مسائل درونیابي ما ممكن است از چندجمله ایهاي درجه بالاتر استفاده كنیم .استفاده از چندجمله اي ها درجه بالا نه تنها تعداد عملیات محاسباتي افزایش

مي يابد بلكه نتايج حاصله بعلت خطاهاي راوند كردن مطمئن نباشد .براي نگه داشتن درجه چندجمله ايهاي درونياب درحد پائين و براي رسيدن به دقت مورد نظر درمسائل تقريب از درونيابي قطعه قطعه اي (Piecewise) استفاده مي شود .با افراز باز داده شده [a,b] به زيــــــر بازه هاي $[x_{i-1},x_i]$ براي $i=1(1)n$ وتقريب تابع بوسيله چندجمله ايهاي درجه پائين درهرزير بازه مي توان دقت را افزايش داد واز سرشت نوساني چندجمله ايهاي درجه بالا جلوگيري نمود . ساده ترين نوع اين درونيابي ،

درونيابي قطعه قطعه خطي است كه از اتصال مجموعه اي از نقاط داده شده مانند

$\{(x_0, f_0),(x_1, f_1),...,(x_n, f_n)\}$

بارشته اي از خطوط مستقيم به يكديگر نظير شكل زير :

٤-١٢ درونيابي اسپلاين (Spline interpolation)

در چند جمله اي هرميت قطعه قطعه اي نيازي به داشتن اطلاعات از پيش تعيين شده $f'(x_i)$ براي $i=0(1)n$ داريم .در مسائل عملي داشتن چنين معلوماتي مشكل است . اگر ما بخواهيم از $f_i = f(x_i), i=0(1)n$ استفاده كنيم آنگاه بدون ارتباط با انتخاب معين اعدادي مانند $m_i = f'(x_i)$ براي $i=0(1)n$.چند جمله اي حاصل شده مكعبي قطعه قطعه اي $p_3(x)$ تابع f(x) را در $x_0,x_1,...,x_n$ درونيابي مي كند و هم چنين $p_3(x)$ در بازه بسته [a,b] پيوسته و مشتق پذير مي باشد .مشتق مرتبه دوم $p_3(x)$ وجود دارد . اما ممكن است در نقاط درونيابي پيوسته نباشد . اما امكان دارد كه $m_n,...,m_1,m_0$ را بطريقي يافت تا چندجمله اي مكعبي قطعه قطعه اي حاصله دوبارپيوسته و مشتق پذير گردد . چنين چندجمله اي مكعبي را درونيابي اسپلاين مــــــــكعبي (Cubic Spline Interpelation) مي نامند . اما درحالت كلي مي توان اسپلاين درجه n ام را به شرح زير تعريف نمود .

تعریف ۴-۲ : یک تابع اسپلاین درجه n ام با نقاط گره ای $x_n,\dots,x_1,x_0$ یک تابع نظیر$S(x)$ با مشخصات زیر است:

(۱) - درهر زیر بازه $[x_{i-1},x_i]\,,1\le i\le n$ ، $S(x)$ یک چند جمله ای درجه n ام است

(۲) -$S(x)$ و مشتقات آن تا مرتبه $(n-1)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته هستند اما در زیر ما فقط به اسپلاین مکعبي مي پردازیم :

اثبات فرمول اسپلاین مکعبي

مي توان اسپلاین مکعبي را به فرم دیگري ایجاد کرد از آنجا که $S(x)$ یک چند جمله اي مکعبي و قطعه قطعه اي است لذا $s''(x)$ دربازه $x\in[x_{i-1},x_i]$ یک تابع خطي است بنابراین مي توان نوشت :

$$s''(x)=\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}s''(x_{i-1})+\frac{(x-x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}s''(x_i) \qquad (4.25)$$

چنانچه $s''(x_{i-1})=M_{i-1},s''(x_i)=M_i$ فرض کنیم و دوبار از رابطه (4.25) نسبت به x انتگرال بگیریم داریم :

$$S(x)=\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i+C_1x+C_2 \qquad (4.26)$$

c_2,c_1 ثابتهاي انتگرال گیري هستند و با استفاده از شرایط درونیابي $s(x_{i-1})=f(x_{i-1}),s(x_i)=f(x_i)$

مي توانند تعیین شوند .لذا پس از بدست آوردن یک دستگاه دو معادله دو مجهول ، مجهولات C_2,C_1 بصورت زیر مي یابیم :

$$C_1=\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}-\frac{1}{6}(M_i-M_{i-1})h_i$$

$$C_2=\frac{(x_i f_{i-1}-x_{i-1}f_i)}{h_i}-\frac{1}{6}(x_iM_{i-1}-x_{i-1}M_i)h_i \qquad (4.27)$$

(4.27) را در (4.26) قرار مي دهیم ، داریم :

$$S(x)=(x_i-x)\left[\frac{(x_i-x)^2-h^2{}_i}{6h_i}\right]M_{i-1}+(x-x_{i-1})\left(\frac{(x-x_{i-1})^2-h^2{}_i}{6h_i}\right)M_i$$
$$+\frac{1}{h_i}(x_i-x)\,f_{i-1}+\frac{1}{h_i}(x-x_{i-1})\,f_i \qquad (4.28)$$

برای $h_i=x_i-x_{i-1}\ ,\ i=1(1)n$

رابطه فوق اسپلاین مکعبي در بازه $[x_{i-1},x_i]$ است اما هنوز مجهولات M_i بایستي تعیین شوند لذا براي تعیین مجهولات M_i ها از شرط پیوستگی مشتق مرتبه اول در نقاط درونیابي x_i ها استفاده مي کنیم. حال نیاز داریم مشتق مرتبه اول $S'(x)$ در $x=x_0\pm\varepsilon$ وقتیکه $\varepsilon\to 0$ پیوسته باشد یعني $S'(x_i-\varepsilon)=S'(x_i+\varepsilon)$ وقتیکه $\varepsilon\to 0$ لذا داریم :

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{6}M_i+\frac{1}{h_i}(f_i-f_{i-1})=-\frac{h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\frac{1}{h_{i+1}}(f_{i+1}-f_i)$$

که بصورت زیر ساده میشود :

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i+h_{i+1}}{3}M_i+\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}=\frac{1}{h_{i+1}}(f_{i+1}-f_i)-\frac{1}{h_i}(f_i-f_{i-1})\ \ ,\ \ i=1(1)n-1 \qquad (4.29)$$

رابطه فوق یك دستگاه (n-1)(n-1) خطي است و مجهولات $M_n,M_{n-1},...,M_1,M_0$ مي باشند دو معادله دیگر نیاز داریم تا بتوانیم بصورت منحصربفرد مجهولات را بیابیم لذا از یکي از شرایط زیر استفاده مي کنیم :

۱- $M_0=M_n=0$ ، اسپلایني که در این شرایط صدق کند اسپلاین طبیعي مي نامیم

۲- $h_1=h_{n+1},\ f_1=f_{n+1}\ ,\ f_0=f_n\ ,\ M_1=M_{n+1},\ M_0=M_n$ اسپلایني که از این شرایط استفاده نماید اسپلاین متناوب (Periodic Spline) مي نامند .

۳- چنانچه از شرایط :

$$S'(a)=f'(a)=f'_0$$
$$S'(b)=f'(b)=f'_n$$

استفاده نمائیم داریم :

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0'\right)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right) \qquad (4.30)$$

با همراه كردن دستگاه (4.29) با يكي از سه شرط فوق مي توان مجهولات $M_n,...,M_1,M_0$ را بصورت منحصربفرد يافت آنگاه اسپلاين مكعبي رابطه (4.28) را مي توان يافت .

حال اگر حالت خاص را درنظر بگيريم وفرض كنيم نقاط درونيابي متساوي الفاصله باشند يعني $x_i = x_0 + ih$, $i = 0(1)n$ باشد در اين صورت $h_i = h_{i+1} = h$ دستگاه (4.28) و (4.29) و (4.30) به ترتيب به صورت زير در مي آيند :

$$S(x) = \frac{1}{6h}(x_i - x)[(x_i - x)^2 - h^2]M_{i-1} + \frac{1}{6h}(x - x_{i-1})[(x - x_{i-1})^2 - h^2]M_i$$
$$+ \frac{1}{h}[(x_i - x) f_{i-1} + (x - x_{i-1}) f_i] \quad , \quad i = 1(1)n \qquad (4.31)$$

و

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \ , \quad i = 1(1)n-1 \qquad (4.32)$$

$$(I) \qquad M_0 = M_n = 0$$
$$(II) \qquad M_0 = M_n \ , M_1 = M_{n+1} \ , f_0 = f_n \ , f_1 = f_{n+1}$$
$$(III)\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h}\left(\dfrac{f_1 - f_0}{h} - f_0'\right) \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h}\left(f_n' - \dfrac{f_n - f_{n-1}}{h}\right) \end{cases} \qquad (4.33)$$

مثال ٤-١٧ : تقريب اسپلاين مكعبي طبيعي براي تابع داده شده بصورت جدولي زير بيابيد .

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	0	1	2	3
f(x)	1	2	33	44

حل : از آنجا كه داده هاي جدولي متساوي الفاصله با گام مساوي h=1 است از رابطه (4.32) داريم :

$$M_{i-1}+4M_i+M_{i+1}=6(f_{i-1}-2f_i+f_{i-1})\,,\ i=1,2$$

بنابراين :

$$\begin{cases}M_0+4M_1+M_2=6(f_2-2f_1+f_0)\\ M_1+4M_2+M_3=6(f_3-2f_2+f_1)\end{cases}$$

چون اسپلاين طبيعي است داريم $M_0=M_3=0$ لذا دستگاه فوق به صورت زير خواهيم داشت :

$$\begin{cases}4M_1+M_2=180\\ M_1+4M_2=1080\end{cases}$$

با حل اين دستگاه $M_2=276$ و $M_1=-24$.

بنابراين اسپلاين مكعبي در بازه ها متفاوت بصورت زير داريم يعني M_0 تا M_3 را در رابطه (4.70) براي i=1,2,3 قرار ميدهيم.

در بازه [0,1] داريم : $S(x)=-4x^3+5x+1$

در بازه [0,1] داريم : $S(x)=50x^3-162x^2+167x-53$

در بازه [0,1] داريم : $S(x)=-64x^3+414x^2-985x+715$

تمرينهاي فصل چهارم

– با فرض اينكه $f(2)=46$, $f(-1)=4$, $f(1)=4$, $f(3)=156$, $f(4)=484$ باشند براي محاسبه f(0) از دستور لاگرانژ استفاده كنيد و چند جمله اي درونياب را نيز بيابيد .

۲- براي پيداكردن چند جمله اي درونياب $P_3(x)$ كه ازنقاط $(4,59),(2,7),(1,2),(0,3)$ مي گذرد . از دستور لاگرانژ استفاده كنيد و از آنجا مقدار $P_3(3)$ را بيابيد

۳- چندجمله اي درونياب $f(x)=x^2+\sin \pi x$ كه از نقاط $(0,0),(1,1),(2,4)$ مي گذرد بيابيد . خطاي $f(\frac{1}{2})$ را بيابيد . حداكثر خطا چيست ؟

٤-داده هاي زير مفروضند ، مقادير $f(1.98), f(0.15)$ را محاسبه كنيد .

x	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	1	1.2840	2.7183	9.4877	54.5982

٥-براي داده هاي ذيل يك جدول تفاضلي تقسيم شده تشكيل دهيد .سپس مقداري براي f(0.5) را بيابيد .

x	0.1	0.3	0.4	0.7	0.9
f(x)	1.10517	1.34989	1.49187	2.01390	2.45985

٦-جدول تفاضلي مربوط به $f(x)=\sin x$ براي $x=0^o(10^o)50^0$ را درنظربگيريد . $\sin(5^o)$ و $\sin(47^o)$ را درونيابي كنيد .

٧-جدول تفاضلي $f(x)=e^x$ را براي $x=0.1(0.05)0.4$ را بنويسيد و آنگاه $e^{0.14}$ و $e^{0.315}$ را محاسبه كنيد .

٨-براي داده هاي زير نشان دهيد كه يك جمله اي درجه سوم را مي توان بعنوان تقريب داده ها بكار گرفت

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f(x)	1	1.096	1.048	0.952	0.904	1

٩-براي داده هاي زير اسپلاين مكعبي را تقريب بزنيد درصورتيكه $M_0=M_3=0$ باشد آنگاه f(1.5) و $f'(2)$ را بيابيد .

x	1	2	3	4
f(x)	1	5	11	8

۱۳-نشان دهيد که چند جمله اي درونياب داده هاي زير ، درجه ۳ است .

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	1	4	11	16	13	-4

فصل پنجم

حل سیستمهای خطی

مقدمه :

سیستم n معادله و n مجهول خطی زیر را درنظر می گیریم

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1) \\
&a_{na}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_x = b_n
\end{aligned}
$$

به طوری که $i, j = 1(1)n$ و

(a_{ij}) و b_i مقادیر حقیقی و معلوم باشند ، x_i مجهولات سیستم خطی (۱) هستند که بایستی محاسبه شوند. این سیستم را به فرم ماتریسی زیر می توان نوشت:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$AX = b$$

اگر $(b_i) = 0 , i = 1(1)n$ باشند سیستم را همگن می نامیم و اگر حداقل یک b_i ناصفر باشد در این صورت سیستم را سیستم ناهمگن خوانند. سیستم ناهمگن (۱) دارای جواب یکتاست اگر و فقط اگر دترمینان A صفر نباشد یعنی:

$$
\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0
$$

در این صورت جواب سیستم (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$X = A^{-1}b$$

سیستم همگن $AX = \bar{0}$ دارای جواب $X = \bar{0}$ است اگر $\det(A) \neq 0$ باشد. بنابراین در مسائل عملی ما با سیستمهای همگن مواجه هستیم و جواب $X = \bar{0}$ برای ما عملا پذیرفتنی

نیست. لذا چنان چه سیستم را برحسب پارامتر λ به صورت زیر بنویسیم

$$AX = \lambda X$$

و λ را چنان بیابیم که

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

باشد آنگاه جواب ناصفر را برای X می یابیم. این مسئله ما را به مبحث مقادیر ویژه و بردارهای ویژه رهنمون می سازد. λ را مقدار ویژه و X را بردار ویژه متناظر با آن می نامیم .

$$AX = \lambda X \;\Rightarrow\; AX - \lambda X = 0 \;\Rightarrow\; (A - \lambda I)X = 0 \qquad (2)$$

برای اینکه جواب ناصفر بگیریم بایستی $\det(A - \lambda I) = 0$ باشد. از بسط دترمینان یک چندجمله ای درجه n ام بر حسب λ خواهیم داشت که به معادله ویژه معروف است. از آنجا که سیستم خطی n معادله و n مجهول دارد این معادله دارای n ریشه است که $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ می باشند. ریشه های این معادله می توانند جملگی مجزا و حقیقی باشند، می توانند تکراری و مختلط نیز باشند. مقدار ویژه ای که از لحاظ کمی بیشترین مقدار را داشته باشد شعاع طیفی نامیم و با $\rho(A)$ نشان داده می شود.

روشهای حل سیستم (۱) به طور اجمالی به دو دسته کلی تقسیم می شوند که عبارتند از:

۱- روشهای مستقیم

۲- روشهای تکراری

روشهای مستقیم روشهایی هستند که هم زمان همه جوابهای سیستم (۱) را به دست خواهند داد و روشهای تکراری روشهایی هستند که جواب سیستم (۱) را با یک معیار دقت تقریب می زنند. در زیر ابتدا روشهای مستقیم را بررسی می کنیم.

روشهای مستقیم

اساس کار روشهای مستقیم این است که اگر با استفاده از تمهیداتی (تبدیلاتی) سیستم را به سیستمهای مشروح زیر برگردانیم می توانیم مستقیما تمامی جوابها را هم زمان بیابیم.

I- چنانچه بتوانیم ماتریس ضرایب سیستم را به ماتریس قطری یا به عبارتی سیستم را به سیستم قطری تبدیل کنیم یعنی اگر $A \to D$ یعنی:

$$d_{ij} = 0 \quad if\ i \neq j$$
$$d_{ij} \neq 0 \quad if\ i = j$$

آنگاه

$$a_{11}x_1 = b_1 \quad \Rightarrow x_1 = {b_1}/{a_{11}}$$
$$a_{22}x_2 = b_2 \quad \Rightarrow x_2 = {b_2}/{a_{22}}$$
$$\vdots$$
$$a_{nn}x_n = b_n \quad \Rightarrow x_n = {b_n}/{a_{nn}}$$

به طوری که اگر $,i = 1(1)n$ $a_{ii} \neq 0$ باشد می توان $x_1, x_2, ..., x_n$ را همزمان یافت.

در این حالت الگوریتم برای سیستم داده شده $AX = b$ عبارت است از:

۱- مرحله اول :برای $i = 1(1)n$.

۲- مرحله دوم: محاسبه می کنیم $x_i = {b_i}/{a_{ii}}$.

II- چنانچه بتوان سیستم را به سیستم پائین مثلثی تبدیل کنیم یعنی ماتریس ضرایب A را به یک ماتریس پائین مثلثی برگردانیم:

$$A \to L \quad \Rightarrow \quad l_{ij} \neq 0 \quad if\ \ j \leq i$$
$$l_{ij} = 0 \quad if\ \ j > i$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 &&= b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &&= b_2\\
&\vdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &&= b_n
\end{aligned}$$

از رابطه اول ابتدا می توان x_1 را به صورت زیر به دست آورد:

$$x_1 = b_1 / a_{11}$$

و اگر x_1 را در رابطه دوم قرار دهیم x_2 را می توان یافت:

$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1) / a_{22}$$

و به همین طریق سرانجام می توان x_3، x_4 تا x_n را یافت یعنی:.

$$x_n = \left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j\right) / a_{nn}$$

لذا می توان الگوریتم جایگزینی از بالا را به صورت زیر بنویسیم.

برای سیستم $AX = b$ الگوریتم جایگزینی از بالا را به شرح زیر می نویسیم:

۱- مرحله اول: برای $k = 1(1)n$.

۲- مرحله دوم: محاسبه کن $x_k = \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right) / a_{kk}$.

III- اگر ماتریس ضرایب سیستم را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم یعنی:

$$\begin{aligned}
U_{ij} &\neq 0 \quad if\ i \leq j\\
U_{ij} &= 0 \quad if\ i > j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\ddots\\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

با استفاده از جایگزینی از پائین ابتدا x_n را $(x_n = b_n/a_{nn})$ را محاسبه می کنیم و در روابط بالا قرار می دهیم و سرانجام همه مقادیر x را محاسبه می کنیم. الگوریتم این حالت را که الگوریتم جایگزینی از پائین می نامیم به شرح زیر است:

۱- مرحله اول: برای $k = n(-1)1$.

۲- مرحله دوم: محاسبه کن $x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right) \Big/ a_{kk}$.

نتیجه می گیریم که در سه حالت فوق عملا مقدور است جوابهای سیستم را بیابیم. پس اساس کار روشهای مستقیم و هدف آنها تبدیل سیستم به سه حالت فوق است. در زیر روش حذفی گاوس را بررسی می کنیم.

روش حذفی گاوس

اساس این روش مستقیم بر حذف ساده مجهولات و تبدیل سیستم به سیستم بالا مثلثی است و با استفاده از الگوریتم جایگزینی از پائین دستگاه معادلات را می توان به آسانی حل نمود. برای توضیح این روش ابتدا فرض می کنیم سیستم $AX = b$ یک سیستم $n \times n$ و خوش وضع باشد. ابتدا سیستم را مرتب می کنیم و تمام ضرایب سیستم را در محلهای مناسب به حافظه کامپیوتر می سپاریم و طرف راست سیستم را نیز به حافظه کامپیوتر وارد می کنیم. سپس رابطه اول را نگه می داریم و به کمک این رابطه و مضربهای مناسب ضریب x_1 را حذف می نمائیم. همه ضرایب مجهولات در $(n-1)$ رابطه باقیمانده تغییر می نمایند و در همان محلهای قبلی به جای ضرایب قبلی به حافظه سپرده می شوند. $(n-1)$ رابطه را که دستخوش تغییر شدند را مجددا مرتب می کنیم. در دور بعد به کمک رابطه ۲

$$a_{ij} = a_{ij}^{(1)} \qquad i, j = 1(1)n$$
$$b_i = b_i^{(1)} \qquad i = 1(1)n$$
$$m_{i1}^{(1)} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \qquad i = 2(1)n$$
$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}^{(1)} a_{1j}^{(1)} \qquad i = 2(1)n\,,\ j = 1(1)n$$
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}^{(1)} b_1^{(1)} \qquad i = 2(1)n$$
$$a_{i1}^{(2)} = 0 \qquad i = 2(1)n$$

ضریب x_2 را از $(n-2)$ رابطه باقیمانده صفر می سازیم و این عمل را ادامه می دهیم.

حال فرض می کنیم به مرحله k ام رسیده ایم یعنی می خواهیم ضریب x_k را از $n-k$ رابطه باقیمانده صفر بسازیم. مضرب مناسب در این حالت عبارت است از:

$$m_{ik}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad i = k+1(1)n$$
$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)} \qquad i = k+1(1)n$$
$$j = k(1)n$$
$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}^{(k)} b_k^{(k)} \qquad i = k+1(1)n$$
$$a_{ik}^{(k+1)} = 0 \qquad i = k+1(1)n$$

بدین طریق وقتی که $k = 1(1)n$ تغییر کند سیستم را به سیستم بالامثلثی تبدیل می کنیم.
چنانچه ماتریس ضرایب سیستم بزرگ باشد این روش شامل تعداد اعمال حسابی قابل توجهی است و در هر مرحله از روند محاسبات، اعداد محاسبه شده را در مرحله بعد به کار می بریم. این موقعیتی را ایجاد می کند که در آن انباشتگی خطا محتمل است و می تواند منشاء خطای بزرگی شود. پس باید سعی شود که خطا را Min سازیم. این کار زمانی عملی است که عنصر محور $a_{kk}^{(k)}$ بزرگترین عنصر $a_{ik}^{(k)}$ در همان ستون برای $i \geq k$ باشد یعنی مضربهای به کار رفته از یک کوچکتر باشند تا خطای محاسباتی به حداقل مقدار ممکن برسد.

برای نیل به این هدف ، لازم است که سیستم را مرتب کنیم .یعنی جای سطرها را عوض نمایيم . این نوع مرتب کردن را محورگیری جزئی می نامیم.با محورگیری جزئی ممکن است در حین عملیات تقسیم بر صفر صورت گیرد. چنانچه پس از محورگیری جزئی لازم باشد تا از تقسیم بر صفر جلوگیری کنیم آنگاه می توان جای ستونها را عوض نماییم این عمل رامحورگیری کلی می نامند.

این روش را با مثال زیر توضیح می دهیم.

$$\begin{array}{lcll} 2x_1+5x_2+8x_3=36 & & 4x_1+8x_2-12x_3=-16 & (1)\\ 4x_1+8x_2-12x_3=-16 & \Rightarrow & 2x_1+5x_2+8x_3=36 & (2)\\ x_1+8x_2+x_3=20 & & x_1+8x_2+x_3=20 & (3) \end{array}$$

مرحله اول: با استفاده از رابطه (1) ضریب x_1 را از روابط (2) و (3) صفر می سازیم.

$$\begin{array}{llcll} & 4x_1+8x_2-12x_3=-16 & (1)' & & 4x_1+8x_2-12x_3=-16\\ m=-1/2 & x_2+14x_3=44 & (2)' & \Rightarrow & 6x_2+4x_3=24\\ m=-1/4 & 6x_2+4x_3=24 & (3)' & & x_2+14x_3=44 \end{array}$$

مرحله دوم:با استفاده از معادله $(2)'$ x_2 را از معادله $(3)'$ حذف می کنیم.

$$\begin{array}{lll} & 4x_1+8x_2-12x_3=-16 & (1)''\\ & 6x_2+4x_3=24 & (2)''\\ m=-1/6 & 40/3\, x_3=40 & (3)'' \end{array}$$

بنابراین با استفاده از الگوریتم جایگزینی از پائین

$$x_3=3$$

$$x_2=\frac{24-12}{6}=2$$

$$x_1=1$$

۱- سیستمهای خطی زیر را بار وش حذفی گوس با محورگیری جزئی حل کنید.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$$

۲- دستگاه زیر را با محورگیری جزئی حل کرده و کلیه عملیات محاسباتی را تا چهار رقم اعشار انجام دهید.

$$\begin{aligned} 4.01x_1 + 1.23x_2 + 1.43x_3 - 0.73x_4 &= 5.94 \\ 1.23x_1 + 7.41x_2 + 2.41x_3 + 3.02x_4 &= 14.07 \\ 1.43x_1 + 2.41x_2 + 5.79x_3 - 1.11x_4 &= 8.52 \\ -0.73x_1 + 3.02x_2 - 1.11x_3 - 16.41x_4 &= 7.59 \end{aligned}$$

روشهای تکراری

این روشها با توجه به سادگی و عدم حساسیتشان نسبت به خطای گرد کردن (*Round Error*) برای کاربرد با برنامه های کامپیوتری مناسبتر از روشهای مستقیم می باشند، زیرا در مقایسه با روشهای مستقیم حافظه کمتری را اشغال می کنند و می توانند عملیات تکرار را تا رسیدن به دقت مورد نظر ادامه دهند.برای آشنایی با این روشها ابتدا روش تکرار ژاکوبی را فرامی گیریم.

الف) روش تکراری ژاکوبی

سیستم خطی

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

مفروض است. این روش در حقیقت تعمیم روش تکرار ساده در حل معادلات غیر خطی و یک متغیره است. ابتدا سیستم خطی را مرتب می کنیم به طریقی که درایه های روی قطر ناصفر باشند و از لحاظ کمی نسبت به سایر درایه های هم سطر آن بیشترین کمیت را داشته باشد سپس دستگاه معادلات خطی را طوری بازنویسی می کنیم که هرکدام از روابط یکی از مجهولات را برحسب مجهولات دیگر بیان نماید.

$$\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n)/a_{11}\\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - \ldots - a_{2n}x_n)/a_{22}\\
&\vdots\\
x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn}
\end{aligned}$$

با تقریب اولیه دلخواه $X^{(0)}=[x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}]$ شروع می کنیم و دور تکراری را آغاز می نماییم. فرض می کنیم تقریب $X^{(1)}$ را محاسبه کرده ایم. سپس این مقدار را به عنوان تقریب در دور بعد به کار می گیریم و $X^{(2)}$ را می یابیم و این عمل را ادامه می دهیم. پس:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(0)})/a_{11}\\
x_2^{(1)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(0)})/a_{22}\\
&\vdots\\
x_n^{(1)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)})/a_{nn}
\end{aligned}$$

سپس $X^{(1)}$ را در رابطه فوق قرار می دهیم. داریم:

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(1)})/a_{11}\\
x_2^{(2)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(1)})/a_{22}\\
&\vdots\\
x_n^{(2)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)})/a_{nn}
\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم این عملیات $k-1$ مرتبه تکرار شود سرانجام X^k را به شرح زیر می یابیم.

$$x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) / a_{11} = (b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k-1)}) \Big/ a_{11}$$

$$x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) / a_{22} = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} a_{2j}x_j^{(k-1)}) \Big/ a_{22}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}) / a_{nn} = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k-1)}) \Big/ a_{nn}$$

الگوریتم روش ژاکوبی

سیستم $AX = b$ داده شده،یک تقریب اولیه $X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}]$ انتخاب می کنیم.دستگاه را مرتب کرده تا تقسیم برصفر صورت نگیرد.

۱- مرحله اول: برای $k = 0$.

۲- مرحله دوم: برای $i = 1(1)n$ محاسبه می کنیم :

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \Big/ a_{ii}$$

۳- مرحله سوم: اگر $x_i^{(k+1)}$ به اندازه کافی دقیق باشد یعنی به معیار دقت حل مسئله $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \le \xi$ رسیده باشد به مرحله چهارم می رویم.در غیر این صورت $k = k+1$ به مرحله دوم برگردیم.

۴- روند را متوقف کنید.

حال الگوریتم فوق را با نماد ماتریسی نشان می دهیم که جهت کارهای نظری مانند همگرایی روش به آن نیاز داریم.

اگر طرفین رابطه فوق را در a_{ii} ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1^{(k)} = b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \\
&a_{22}x_2^{(k)} = b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_{n-1}^{(k-1)} \\
&\vdots \\
&a_{nn}x_n^{(k)} = b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & & & U \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ L & & & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \quad DX^{(k)} = -(L+U)X^{(k-1)} + b
$$

$$X^{(k)} = -D^{-1}(L+U)X^{(k-1)} + D^{-1}b$$

که $-D^{-1}(L+U)$ را برابر با H می گیرند و ماتریس روش تکراری ژاکوبی گویند.معمولا $D^{-1}b$ را هم برابر با C می گیرند.پس داریم:

$$X^{(k)} = H_j X^{(k-1)} + C_j \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

می توان H_j را هم به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
&H_j = -D^{-1}(-D + D + L + U) = -D^{-1}(-D + A) \\
&H_j = (I - D^{-1}A)
\end{aligned}
$$

ب) روش تکراری گاوس- سایدل

این روش اصلاح شده روش ژاکوبی است.در این روش آخرین مقدار محاسبه شده برای مجهولات (برای هریک از مجهولات) در معادلات بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. این روش در عین حال زودتر از روش قبل به جواب می رسد و حافظه کمتری از کامپیوتر را اشغال می کند.زیرا هر بار از متغیرهای جدید استفاده می کند و نیازی به ذخیره سازی مقادیر $x^{(k)}$ نمی باشد.حدس اولیه هیچ گونه تاثیری بر سرعت همگرایی نخواهد داشت.

اگر ضرایب روی قطر سیستم در هر سطر از مجموع سایر ضرایب همان سطر بزرگتر باشد عملیات خیلی زودتر به جواب خواهد رسید.

حال اگر سیستم مرتب شده ژاکوبی را درنظر بگیریم:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(0)}) / a_{11} \\
&x_2^{(1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(0)}) / a_{22} \\
&\vdots \\
&x_n^{(1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)}) / a_{nn}
\end{aligned}
$$

که $X^{(1)}$ به دست می آید.مجددا این روش را ادامه می دهیم. این بار:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(2)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(1)}) / a_{11} \\
&x_2^{(2)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(2)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(1)}) / a_{22} \\
&\vdots \\
&x_n^{(2)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(2)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(2)}) / a_{nn}
\end{aligned}
$$

و $X^{(2)}$ حاصل می شود.فرض کنیم این عمل $k-1$ بار انجام شود داریم:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) / a_{11} = (b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(k-1)}) \Big/ a_{11} \\
&x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) / a_{22} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j^{(k-1)}) \Big/ a_{22} \\
&\vdots \\
&x_n^{(k)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) / a_{nn} = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{(k)} \Big/ a_{nn}
\end{aligned}
$$

الگوریتم روش گاوس - سایدل

برای سیستم $AX = b$ و برای تقریب اولیه مفروض $X^{(0)}$ و با انتخاب ζ معیار دقت داده شده الگوریتم روش گاوس - سایدل به شرح زیر است:

۱- مرحله اول: برای $k = 1$.

۲- مرحله دوم: برای $i = 1(1)n$ محاسبه کن :

$$
x_i^{(k)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}) \Big/ a_{ii}
$$

۳- مرحله سوم: اگر $X^{(k)}$ به اندازه کافی دقیق باشد یا به عبارت دیگر $\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\| \le \zeta$ باشد به مرحله چهارم برو.در غیر این صورت $k = k+1$ و به مرحله دوم برو.

۴- روند را متوقف کنید.

برای نشان دادن فرم ماتریسی آن اگر $x^{(k)}$ را در طرف چپ و $x^{(k-1)}$ را درطرف راست رابطه فوق قرار دهیم بدین صورت مرتب خواهد شد.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1^{(k)} = b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \\
&a_{22}x_2^{(k)} = b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_{n-1}^{(k-1)} \\
&\vdots \\
&a_{nn}x_n^{(k)} = b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} \\
&-------------------- \\
&a_{11}x_1^{(k)} = -a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)} + b_1 \\
&a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} = -a_{23}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)} + b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k)} = b_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & (L+D)X^{(k)} = -UX^{(k-1)} + b \\
& X^{(k)} = -(L+D)^{-1}UX^{(k-1)} + (L+D)^{-1}b \\
& X^{(k)} = H_g X^{(k-1)} + C_g \qquad k = 1,2,3,\ldots \\
& H_g = -(D+L)^{-1}U \quad , \quad C_g = (D+L)^{-1}b
\end{aligned}
$$

ادامه روش تکرار به صورت فوق برای کارهای نظری بهتر است.برای کاربرد عملی ار فرم زیر بهتر است استفاده شود

$$
x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii} \qquad i = 1(1)n
$$

<u>مثال:</u>

دستگاه سه معادله سه مجهول زیر را با روش گاوس-سایدل و ژاکوبی حل کنید.مراحل تکرار را تا ۱۴ مرحله در نظر بگیرید و درصد خطای نسبی را بیابید.

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 = 7 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\
-x_2 + 2x_3 = 1
\end{cases}
$$

حل به روش ژاکوبی:

$$\begin{cases} x_1 = (7 + x_2)/2 \\ x_2 = (1 + x_3 + x_1)/2 \\ x_3 = (1 + x_2)/2 \end{cases}$$

حال تقریب دلخواه اولیه $X^{(0)} = [0,0,0]$ را درنظر می گیریم.پس داریم:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3.5 \\ x_2^{(1)} = 0.5 \\ x_3^{(1)} = 0.5 \end{cases} \Rightarrow X^{(1)} = [3.5,0.5,0.5]$$

حال $X^{(1)}$ تقریبی برای مرحله بعدی می شود.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3.75 \\ x_2^{(2)} = 2.5 \\ x_3^{(2)} = 0.75 \end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = [3.75,2.5,0.75]$$

و این روند را مجددا ادامه می دهیم تا جایی که $\left\| X^{(m)} - X^{(m-1)} \right\| \le 3 \times 10^{-4}$ شود.

حل به روش گاوس - سایدل:

$$x_1^{(1)} = 3.5$$

$$x_2^{(1)} = (1 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)})/2 = 2.25 \qquad \Rightarrow X^{(1)} = [3.5,2.25,1.625]$$

$$x_3^{(1)} = (1 + x_2^{(1)})/2 = 1.625 \qquad \left\| X^{(1)} - X^{(0)} \right\| = \max_{1 \le i \le 3}\{|x_i|\} = 3.5$$

$$x_1^{(2)} = \frac{7 + 2.2.5}{2} = 4.625$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1 + 4.625 + 1,625}{2} = 3.625 \qquad \Rightarrow X^{(2)} = [4.625,3.625,2.3125]$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1 + 3.625}{2} = 2.3125 \qquad \left\| X^{(2)} - X^{(1)} \right\| = 1.375$$

$$x_1^{(3)} = 5.3125$$

$$x_2^{(3)} = 4.3125$$

$$x_3^{(2)} = 2.65625$$

$$\vdots$$

بالاخره در مرحله ۱۳ داریم:

$$x_1^{(13)} = 5.9993$$

$$x_2^{(13)} = 4.9993$$

$$x_3^{(13)} = 2.9996$$

ودر تکرار ۱۴ :

$$x_1^{(14)} = 5.9996$$
$$x_2^{(14)} = 4.9996$$
$$x_3^{(14)} = 2.9998$$

حال خطای مطلق $\left\| X^{(14)} - X^{13)} \right\| = \left\| (0.0003,0.0003,0.0002)^T \right\| = 3\times10^{-4}$

ودرصد خطای نسبی $\dfrac{\left\| X^{(14)} - X^{(13)} \right\|}{\left\| X^{(14)} \right\|}\times100 = \dfrac{0.0003}{5.9996}\times100$ به دست می آید.

فصل ششم

٦- انتگرال گيري عددي

٦-١ مقدمه :

مسئله اصلي انتگرال گيري عددي عبارتست از يافتن يك مقدار تقريب براي انتگرال زير :

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (6.1)$$

فرض مي كنيم كه f(x) انتگرال پذير است .حدود انتگرال ممكن است معين يا نيمه معين يا بينهايت باشد . انتگرال رابطه (6.1) توسط يك تركيب خطي از مقادير تابع f(x) بصورت زير تقريب زده مي شود :

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \qquad (6.2)$$

بطوريكه k=0(1)n و x_k گره ها ناميده مي شوند ودر بين حدود انتگرال گيري [a,b] قرار دارند و λ_k را وزنهاي دستورانتگرال گيري مي گويند . خطاي تقريب عبارتست از :

$$R_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \qquad (6.3)$$

حال به تعريف مرتبه روش انتگرال گيري مي پردازيم .

تعريف ٦-١ : يك روش انتگرال گيري نظير (6.2) را داراي دقت مرتبه p ام نامند هرگاه اين روش براي همه چندجمله ايهاي درجه كمتر يا مساوي p نتيجه دقيق بدست بدهد .
در رابطه (٦-٢) تعداد مجهولات 2n+2 مي باشد . (n+1 گره x_k و n+1 وزن انتگرال گيري λ_k) .

روش فوق را مي توان براي چندجمله اي درجه كوچكتر ومساوي 2n+1 دقيق گردانيد .لذا روش بصورت رابطه (6.2)مي تواند حداكثر داراي مرتبه دقت 2n+1 باشد . اگر تعدادي از گره ها ازقبل مشخص باشند مرتبه روش كاهش خواهد يافت .اگر n+1 گره از قبل داده شده باشد آنگاه ما بايستي تنها n+1 وزن انتگرال گيري را بيابيم .بنابراين روش حاصله حداكثر داراي دقت n ام خواهد بود .

از آنجا كه روش براي چندجمله اي كوچكتر يا مساوي n دقيق مي باشد .لذا وقتيكه $f(x)=x^i$ براي $i=0(1)n$ داريم $R_n=0$ ووقتيكه $f(x)=x^{n+1}$ باشد ، $R_n \neq 0$ است .

بنابراين جمله خطارا مي توان به فرم زير نوشت :

$$R_n = \frac{C}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) \qquad (6.4)$$

بطوريكه ثابت خطاي C عبارتست از :

$$C = \int_a^b x^{n+1} dx - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k^{(n+1)} \qquad (6.5)$$

اگر C براي $f(x)=x^{n+1}$ صفر شود ، آنگاه چندجمله اي يك درجه بالاتر را درنظر مي گيريم .حال با صرف نظر كردن جمله خطا روش بصورت زير را مي يابيم .

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \qquad (6.6)$$

٦-2 روشهاي نيوتن كاتس

وقتيكه $w(x)=1$ باشد و گره هاي x_k با گام مساوي $h=\frac{b-a}{n}$ با $x_n=b$ و $x_0=a$ مدنظر باشند آنگاه روش (6.6) را روش انتگرال گيري نيوتن كاتس مي نامند . حال با انتخاب مقادير متفاوت n مي توان خانواده اي از روشهاي نيوتن كاتس رابدست آورد .

روش ذوزنقه اي : براي n=1 داريم $x_0=a$, $x_1=b$, $h=(b-a)$ لذا داريم :

$$\lambda_0 = -h\int_0^1 (s-1)ds = \frac{h}{2}$$
$$\lambda_1 = h\int_0^1 s ds = \frac{h}{2}$$

پس روش زير را خواهيم داشت :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \qquad (6.7)$$

که به روش ذوزنقه اي معروف است . تعبير هندسي اين روش اين است که روش فوق بيان کننده مساحت ذوزنقه اي است با عرض b-a وقاعده هاي f(b),f(a) که مساحت زير منحني y=f(x) و محور x ها از x=a تا x=b را با آن تقريب مي زنيم .شكل آن بصورت زير است :

ازآنجا که روش ذوزنقه اي براي چندجمله اي کوچکتر يا مساوي n=1 دقيق است وبنابراين داراي دقت مرتبه اول است. خطا بصورت زير مي باشد .

$$C = \int_a^b x^2 dx - \tfrac{1}{2}(b-a)[a^2+b^2] = -\tfrac{1}{6}(b-a)^3$$

با استفاده از رابطه (6.5) داريم :

$$R_1 = \frac{-(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$
$$= \frac{-(b-a)}{12} h^2 f''(\eta)$$

روش سيمپسون :

براي n=2 داريم $h=\frac{b-a}{2}$, $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$ بنابراين داريم :

$$\lambda_0=\frac{h}{2}\int_0^2 (s-1)(s-2)ds=\frac{h}{3}$$

$$\lambda_1=-h\int_0^2 s(s-2)ds=\frac{4h}{3}$$

$$\lambda_2=\frac{h}{2}\int_0^2 s(s-1)ds=\frac{h}{3}$$

حال روش زير را داريم :

$$I=\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \qquad (6.8)$$

اين روش را روش سيمپسون مي نامند . جمله خطاي اين روش عبارتست از :

لذا از آنجا كه اين روش براي چند جمله اي درجه كوچكتر يا مساوي ۲ دقيق است داريم :

$$C=\int_a^b x^3dx-\frac{b-a}{6}\left[a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right]=0$$

چون c=0 است ونشان مي دهد كه اين روش براي چندجمله اي درجه ۳ نيز دقيق است .بنابراين جمله خطا بصورت زير بيان مي شود :

$$R_2=\frac{C}{4!}f^{(4)}(\eta) \qquad \eta\in(0,2)$$

$$C=\int_a^b x^4dx-\frac{b-a}{6}\left[a^4+4\left(\frac{b+a}{2}\right)^4+b^4\right]=-\frac{(b-a)^5}{120} \qquad (6.9)$$

بنابراين جمله خطاي روش سيمپسون عبارتست از :

$$R_2=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta) \qquad (6.10)$$

$$R_2=\frac{-\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}{90}f^{(4)}(\eta)=\frac{-h^5}{90}f^{(4)}(\eta)=-\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(\eta) \qquad (6.11)$$

روش ۳/۸ سيمپسون :

وقتیکه n=3 باشد روشي را که مي یابیم به روش 3/8 سیمپسون معروف است .در جدول زیر وزنهاي λ_k براي $n \le 6$ به ازاي w(x)=1 براي روشهاي نیوتن کاتس بصورت زیر آورده شده است .

وزنهاي روش هاي انتگرال گیري نیوتن – کاتس

	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
1	$1/2$	$1/2$					
2	$1/3$	$4/3$	$1/3$				
3	$3/8$	$9/8$	$9/8$	$3/8$			
4	$14/45$	$64/45$	$24/45$	$64/45$	$14/45$		
5	$95/288$	$375/288$	$250/288$	$250/288$	$375/288$	$95/288$	
6	$41/140$	$216/140$	$27/140$	$272/140$	$27/140$	$216/140$	$41/140$

معمولاً براي مقادیر بزرگ n از لحاظ نظري بایستي تقریب بهتري به یابیم .اما براي مقادیر بزرگ $n(n \ne 9, n \ge 8)$ برخي از وزنها انتگرال گیري منفي میشوند . این باعث کاهش ارقام صحیح بامعني در نتایج مي گردد .بدین علت روشهاي مراتب بالاتر نیوتن کاتس معمولاً استفاده نمي شوند .

همه روشهاي فوق الذکر شامل نقاط ابتدا و انتهاي انتگرال گیري هستند (یعني $x_0=a$ و $x_n=b$) این چنین روشهایي را روشهاي بسته مي نامند .روشهایي که شامل ابتدا و انتهاي فاصله نباشد روشهاي باز نامیده مي شود . با جایگزیني چندجمله اي لاگرانژ در رابطه (6.1) براي (n-1) نقطه (x_k,f_k) به ازاي k=1(1)n-1 و انتگرال گرفتن در این حدود برخي از روشهاي باز را بهمراه خطاي آنها بصورت زیر مي یابیم .

گره هاي انتگرال گیري را در این حالت نیز مساوي انتخاب مي کنیم :

$$h = \frac{b-a}{n}\ , x_0 = a\ , x_n = b$$

۱- روش نقطه مياني:

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_0+h) + \frac{h^3}{3} f''(\zeta_1) \quad (6.21) \qquad (n=2)$$

۲-روش دو نقطه اي :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{2}\left[f(x_0+h) + f(x_0+2h)\right] + \frac{3}{4}h^3 f''(\zeta_2)\ , \ (n=3) \quad (6.12)$$

۳- روش سه نقطه اي :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4h}{3}\left[2f(x_0+h) - f(x_0+2h) + 2f(x_0+3h)\right]\ , \ (n=4)$$

$$+\frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\zeta_3) \qquad (6.13) \qquad , \qquad a < \zeta_1\ , \zeta_2\ , \zeta_3 < b$$

مثال ٦-١ - تقريبي براي انتگرال $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ با استفاده از (الف) روش ذوزنقه اي (ب) روش سيمپسون بيابيد . كران بالاي خطا را محاسبه كنيد .

حل : ما مي دانيم كه جواب دقيق انتگرال فوق تا شش رقم اعشار عبارتست از $I = \ln 2 = 0.693147$

با استفاده از روش ذوزنقه اي :

$$I \cong \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = 0.75$$

$$R_1 = 0.75 - 0.693147 = 0.056853$$

كران بالاي خطا براي روش ذوذنقه اي عبارتست از :

$$|R_1| \le \frac{1}{12}\max\left|\frac{2}{(1+x)^3}\right| \le \frac{1}{6}$$

با استفاده از روش سيمپسون داريم :

$$I \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[1+\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\right]=\frac{25}{36}=0.694444$$

$$R_2 = 0.694444-0.693147=0.001297$$

كران بالاي خطا در روش سيمپسون

$$|R_2| \le \frac{1}{2880}\max\left|\frac{24}{(1+x)^5}\right| = 0.008333$$

بامشاهده نتيجه مي گيريم كه خطاي واقعي از كران بالاي خطا درهر دو روش كوچكتر است .

٦-3 روشهاي مركب :

همانطور كه مرتبه روشهاي انتگرال گيري افزايش مي يابد .مرتبه مشتق در جمله خطا متناظر با آن افزايش مي يابد .براي اينكه يك روش داراي نتيجه بامعني باشد اين است كه مشتقات مراتب بالا در فاصله مورد نظر پيوسته باقي بمانند .روشهاي نيوتن مراتب بالاتر ، برخي اوقات نتايج معكوس بدست مي دهند . يك الترناتيو جهت بدست آوردن نتايج دقيق اين است كه از روشهاي مراتب پايين نيوتن كاتس استفاده كنيم وفاصله انتگرال گيري را به فواصل ريزتر افراز كنيم و روشهاي مركب انتگرال گيري ايجاد كنيم .

روش مركب ذوزنقه اي :

فاصله [a,b] را به N زيرفاصله افراز مي كنيم. با گام $h=\frac{b-a}{N}$ ما زير فاصله هاي

$(x_0,x_1),(x_1,x_2),...(x_{N-1},x_N)$ رادرنظر مي گيريم بطوريكه $x_i=x_0+ih\,,\,x_N=b\,,\,x_0=a$

براي $i=1(1)N-1$ بنابراين مي توان نوشت :

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+...+\int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx \qquad (6.14)$$

هركدام از انتگرالهاي طرف راست رابا روش ذوزنقه اي محاسبه مي كنيم :

$$I=\frac{h}{2}\{(f_0+f_1)+(f_1+f_2)+...+(f_{N-1}+f_N)\}$$
$$=\frac{h}{2}\{f_0+2(f_1+f_2+...+f_{N-1})+f_N\} \qquad (6.15)$$

خطا در اين روش

$$R_1=-\frac{h^3}{12}\{f''(\zeta_1)+f''(\zeta_2)+...+f''(\zeta_N)\} \qquad a<\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_N<b$$

اگر $f''(x)$ براي هرx درفاصله [a,b] ثابت باشد يا اگر :

$$f''(\eta)=\max_{a\le x\le b}|f''(x)| \qquad a\le\eta\le b$$

آنگاه داريم

$$R_1=\frac{-h}{12}(Nf''(\eta))=\frac{-h^3}{12}(\frac{(b-a)}{h})f''(\eta)=\frac{-(b-a)h^2}{12}f''(\eta)$$
$$R_1=\frac{-(b-a)^3}{12N^3}(Nf''(\eta))=-\frac{(b-a)^3}{12N^2}f''(\eta) \qquad (6.16)$$

فاكتور N در مخرج رابطه فوق نشان مي دهد كه براي مقادير بزرگ N خطا به اندازه كافي كوچك مي شود .تعداد زيرفاصله براي اين روش مي تواند فرد يا زوج باشد .

روش مرکب سیمپسون :

براي استفاده از روش سيمپسون ما نياز داريم كه سه گره داشته باشيم .ما فاصله [a,b] را به تعداد زوج افراز مي كنيم تابتوانيم تعداد گره هاي فرد داشته باشيم .اگر فاصله [a,b] را به 2N زيرفاصله با گام مساوي افراز كنيم گام متساوي الفاصله h عبارتست از :

$$h = \frac{b-a}{2N}$$

آنگاه ما 2N+1 گره انتگرال گيري زير را خواهيم داشت .

$$x_0 = a \qquad x_{2N} = b \qquad x_i = x_0 + ih \qquad i = 1,2,...,2N-1$$

بنابراين داريم :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{2N-2}}^{x_{2N}} f(x)dx \qquad (6.17)$$

هركدام از انتگرالهاي طرف راست رابطه فوق را با فرمول سيمپسون محاسبه مي كنيم .

$$I = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + ... + \frac{h}{3}(f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N})$$
$$+ \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_1) + \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_2) + ... + \frac{-h}{90} f^{(4)}(\zeta_N)$$

$$I = \frac{h}{3}\{f_0 + 4(f_1 + f_3 + ... + f_{2N-1}) + 2(f_2 + f_4 + ... + f_{2N-2}) + f_{2N}\} \qquad (6.18)$$

اين روش را روش مركب سيمپسون مي ناميم . جمله خطا براي اين روش عبارتست از :

$$R_2 = \frac{-h^5}{90}\{f^{(4)}(\zeta_1) + f^{(4)}(\zeta_2) + ... + f^{(4)}(\zeta_N)\} \qquad (6.19)$$

بطوري كه براي : $a < \zeta_i < b \quad , \quad i = 1(1)N$

با استفاده از : $f^{(4)}(\eta) = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)} x \right| \quad \eta \in (a,b)$

مي توان رابطه (4.19) رابصورت زير نوشت :

$$R_2 = \frac{-h^5}{90}(Nf^{(4)}(\eta))$$
$$= \frac{-h^5}{90}\left\{\frac{b-a}{2h} f^{(4)}(\eta)\right\} = \frac{-(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\eta)$$
$$R_2 = \frac{-\left(\frac{b-a}{2N}\right)}{90}(Nf^{(4)}(\eta)) = \frac{-(b-a)^5}{180N^4} f^{(4)}(\eta) \qquad (6.20)$$

مثال ٦-٢ : انتگرال زیر را با روشهاي (الف)ذوزنقه اي مرکب و سیمپسون مرکب با ٢و٤و٨ زیر فاصله متساوي حل کنید .

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

وقتیکه N=2 باشد و h=1/2 گره ها 0,1/2,1 را خواهیم داشت .

$$I_T = \frac{h}{2}\{f_0 + 2f_1 + f_2\} = \frac{1}{4}[f(0) + 2f(1/2) + f(1)] = 1/4\left[1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{17}{24} = 0.708333$$
$$I_s = \frac{h}{3}[f(0) + 4f(1/2) + f(1)] = \frac{1}{6}(1 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{25}{36} = 0.694444$$

هرگاه N=4 باشد داریم $h = \frac{1}{4}$ بنابراین گره ها عبارتند از $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ ما چهار زیرفاصله براي روش ذوزنقه داریم ودو زیر فاصله براي استفاده روش سیمپسون داریم :

$$I_T = \frac{1}{8}\left\{f(0) + 2(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4})) + f(1)\right\} = 0.697024$$
$$I_s = \frac{1}{12}\left\{f(0) + 4\left[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})\right] + 2f(\frac{1}{2}) + f(1)\right\} = 0.693234$$

هرگاه N=8 باشد ، آنگاه $h = \frac{1}{8}$ ونه گره زیر را داریم

$$0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1$$

ما هشت زیرفاصله براي روش ذوزنقه داریم و چهار زیر فاصله براي روش سیمپسون

$$I_T = \frac{1}{16}\left\{ f(0) + 2\sum_{i=1}^{7}(\frac{i}{8}) + f(1) \right\} = 0.694122$$

$$I_S = \frac{1}{24}\left\{ f(0) + \sum_{i=1}^{4} f(\frac{2i-1}{8}) + 2\sum_{i=1}^{3} f(\frac{2i}{8}) + f(1) \right\} = 0.693155$$

٦-٥ روش انتگرال گيري رامبرگ :

چنانچه روند برون يابي ريچاردسون را در مورد روشهاي انتگرال گيري فوق الذكر بكار ببريم .روشهايي با دقت مراتب بالاتر نسبت به روشهاي قبلي مي يابيم . اين روند را انتگرال گيري رامبرگ مي نامند . براي نيل به اين روش ابتدا خطاي روشهاي انتگرال گيري را بصورت سري تواني ازگام انتگرال گيري بسط مي دهيم و جملات ابتدايي سري را مي توان حذف كرد .

روش رامبرگ بر اساس ذوزنقه :

اگر انتگرال را با روش ذوزنقه اي حل كنيم داريم :

$$I = \int_a^b f(x)dx = I_T(h) + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + ... \qquad (6.21)$$

حال انتگرال را با گام h/2 حل مي كنيم داريم

$$I = I_T(\frac{h}{2}) + c_1\frac{h^2}{4} + c_2\frac{h^4}{16} + c_3\frac{h^6}{64} + ... \qquad (6.22)$$

واگر مجدداً گام را نصف كنيم داريم

$$I = I_T(\frac{h}{4}) + c_1\frac{h^2}{16} + c_2\frac{h^4}{64} + c_3\frac{h^6}{256} + ... \qquad (6.23)$$

والي آخر .اگر C_1 را از روابط فوق حذف كنيم و سپس C_2 را والي آخر روش زير را خواهيم داشت كه به روند رامبرگ بر اساس روش ذوزنقه معروف است مي يابيم :

$$I_T^{(m)}(h) = \frac{4^m I_T^{(m-1)}(h/2) - I_T^{(m-1)}(h)}{4^m - 1} \qquad m = 1,2,... \quad , I_T^{(0)} = I_T^{(1)} \qquad (6.24)$$

روش رامبرگ بر اساس سیمپسون :

چنانچه انتگرال را با روش سیمپسون مرکب با گامهاي $\frac{h}{4},\frac{h}{2},h$ والي آخر حل کنیم داریم :

$$I=\int_a^b f(x)dx = I_s^{(h)}+c_1h^4+c_2h^6+c_3h^8+\ldots \qquad (6.25)$$

$$I=\int_a^b f(x)dx = I_s(h/2)+c_1 h^4/16+c_2 h^6/64+c_3 h^8/256+\ldots \qquad (6.26)$$

$$I=\int_a^b f(x)dx = I_s(h/4)+c_1 h^4/256+c_2 h^6/4^6+c_3 h^8/4^8+\ldots \qquad (6.27)$$

والي آخر .حال اگر ابتدا C_1 را در روابط بالا حذف کنیم وسپس C_2 وبر همین منوال پیش برویم مي توان روش زیر را یافت :

$$I_s^{(m)}(h)=\frac{4^{m+1}I_s^{(m-1)}(\frac{h}{2})-I_s^{(m-1)}(h)}{4^{m+1}-1} \qquad ,m=1,2,\ldots \qquad (6.28)$$

مثال ٦-٣ : انتگرال $I=\int_0^1\frac{dx}{x^3+10}$ را با استفاده از روش ذوزنقه و سیمپسون با سه و پنج ونه گره حل کنید . جوابهاي حاصله را با استفاده از روش رامبرگ دقیق تر سازید .

حل : براي اینکه سه گره داشته باشیم بایستي فاصله [a,b] را به دو زیر فاصله مساوي افراز کنیم بنابراین $h=\frac{b-a}{n}\Rightarrow h=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$

$x_0=0,x_1=1/2,x_2=1$ $f(x)=\frac{1}{x^3+10}$ به ازاي x_2,x_1,x_0 به ترتیب برابر است با

حال اگر انتگرال فوق راباروش ذوزنقه حل کنيم داريم $\frac{1}{11}, \frac{8}{81}, \frac{1}{10}$
:

$$I_T(\tfrac{1}{2}) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)] = \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{10} + \tfrac{16}{81} + \tfrac{1}{11}\right] = 0.09710999$$

اگر انتگرال را به روش سيمپسون حل کنيم داريم :

$$I_s(\tfrac{1}{2}) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \tfrac{1}{6}\left[\tfrac{1}{10} + \tfrac{32}{81} + \tfrac{1}{11}\right] = 0.09766180$$

مسئله فوق را حالا به ٥ گره انتگرال گيري گيري حل مي کنيم بنابراين گام انتگرال گيري را بايستي h=1/4 باشد يعني فاصله [0,1] به ٤ زيرفاصله بايستي افراز کنيم .لذا مقدار تابع f(x) در نقاط گره اي به ترتيب برابر است با :

$$f(x_0) = f(0) = \tfrac{1}{10} \ , \ f(x_1) = f(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{64}{641}$$
$$f(x_2) = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{8}{81} \ , \ f(x_3) = f(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{64}{667} \ , \ f(x_4) = f(1) = \tfrac{1}{11}$$
$$I_T(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{h}{2}[f_0 + 2\{f_1 + f_2 + f_3\} + f_4] = \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{1}{10} + 2(\tfrac{64}{641} + \tfrac{8}{81} + \tfrac{64}{667}) + \tfrac{1}{11}\right] = 0.09750400$$
$$I_s(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{h}{3}[f_0 + 4(f_1 + f_3) + 2f_2 + f_4] = \tfrac{1}{12}\left[\tfrac{1}{10} + 4(\tfrac{64}{641} + \tfrac{64}{667}) + \tfrac{16}{81} + \tfrac{1}{11}\right] = 0.09763533$$

حال اگر مسئله را با ٩ گره بخواهيم حل کنيم h=1/8 و گره هاي انتگرال گيري عبارتند از :

$$x_0 = 0 \ , \ x_1 = \tfrac{1}{8} \ , \ x_2 = \tfrac{1}{4} \ , \ x_3 = \tfrac{3}{8} \ , \ x_4 = \tfrac{1}{2} \ , \ x_5 = \tfrac{5}{8} \ ,$$
$$x_6 = \tfrac{3}{4} \ , \ x_7 = \tfrac{7}{8} \ , \ x_8 = 1$$

مقادير تابع به ازاي نقاط فوق عبارتند از $f(x_i) = \dfrac{1}{(i/8)^3 + 10}$ براي

i=0(1)8

لذا داريم :

$$I_T = (\tfrac{1}{8}) = 0.09760126$$
$$I_s = (\tfrac{1}{8}) = 0.09763368$$

حال اگر از روش رامبرگ براساس ذوزنقه استفاده كنيم يعني از روش (٦-٣٥) استفاده نمائيم داريم :

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
$1/2$	0.09710999		
		0.09763534	
$1/4$	0.09750400		0.09763357
		0.09763368	
$1/6$`	0.09760126		

اگر از روش رابطه (٦-٣٩) يعني از روش رامبرگ براساس سيمپسون استفاده كنيم داريم :

h	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$1/2$	0.09766180		
		0.09763357	
$1/4$	0.09763533		0.09763357
		0.09763357	
$1/8$`	0.09763368		

مثال ٦-٤ : مطلوبست محاسبه انتگرال زير با استفاده از روش رامبرگ وتاگام $h = 1/16$ ، $\int_0^{0.5} \frac{x}{\sin x} dx$

با استفاده از روش ذوزنقه اي داريم :

$$f(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$n = 1 \;,\; h = 1/2 \;,\; x_0 = 0 \;,\; x_1 = 1/2 \Rightarrow I_T(1/2) = 0.510729$$
$$n = 2 \;,\; h = 1/4 \;,\; x_0 = 0 \;,\; x_1 = 1/4 \;, x_2 = 1/2 \Rightarrow I_T(1/4) = 0.507988$$
$$n = 4 \;,\; h = 1/8 \;,\; x_i = i/8 \;,\; i = 0(1)4 \Rightarrow I_T(1/8) = 0.507298$$
$$n = 8 \;,\; h = 1/16 \;,\; x_i = i/16 \;,\; i = 0(1)8 \Rightarrow I_T(1/16) = 0.507126$$

با استفاده از روش رامبرگ داريم :

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$1/2$	0.0510729			
		0.507074		
$1/4$	0.507988		0.507067	
		0.507068		0.507069
$1/8$	0.507298		0.507069	
		0.507069		
$1/16$	0.507126			

همين مثال را مي توان با روش رامبرگ براساس سيمپسون نيز حل كرد

٦-٦ روشهاي مبتني بر ضرائب نامعين :

در اين بخش اگر در روش انتگرال گيري

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

گره ها x_k ووزنهاي λ_k به ازاي $k=0,1,\dots,n$ بخواهيم تعيين كنيم بايستي روش را براي چندجمله اي درجه $2n+1$ دقيق محاسبه كنيم . روشهايي كه بر اين اساس بدست خواهند آمد روشهاي انتگرال گيري گاوسي مي نامند .از آنجا كه بازه متناهي $[a,b]$ را مي توانيم با استفاده از تبديل زير به بازه $[-1,1]$ تبديل نمائيم

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

لذا ما انتگرال را بصورت زیر درنظر مي گيريم :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) \qquad (6.40)$$

روش هاي گاوس لژاندر :

رابطه (٤٠-٦) را بصورت زير خواهيم داشت :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) \qquad (6.41)$$

در اين حالت x_k ها و λ_k ها مجهول هستند وبايستي تعيين شوند .

بعنوان مثال اگر $n=2$ باشد روش (٤١-٦) رابفرم زير خواهيم داشت :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad (6.42)$$

در رابطه (٤٢-٦) شش مجهول داريم كه بايستي تعيين نمائيم بنابراين رابطه فوق بايستي براي چند جمله اي تا درجه پنجم دقيق باشد يعني براي $f(x)=x^i\,,\, i=0(1)5$ داريم :

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=2$$
$$\lambda_0 x_0+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=0$$
$$\lambda_0 x_0^2+\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2=2/3$$
$$\lambda_0 x_0^3+\lambda_1 x_1^3+\lambda_2 x_2^3=0$$
$$\lambda_0 x_0^4+\lambda_1 x_1^4+\lambda_2 x_2^4=2/5$$
$$\lambda_0 x_0^5+\lambda_1 x_1^5+\lambda_2 x_2^5=0$$

با حل سيستم فوق داريم :

$$x_0=-\sqrt{3/5} \qquad x_1=0 \qquad x_2=\sqrt{3/5}$$
$$\lambda_0=5/9 \qquad \lambda_1=8/9 \qquad \lambda_2=5/9$$

بنابراين روش (٤٢-٦)بصورت زير داريم :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{1}{9}\left[5f(-\sqrt{3/5})+8f(0)+5f(\sqrt{3/5})\right] \qquad (6.43)$$

لذا خطاي اين روش را مي توانيم بصورت زير بيابيم :

$$R_s=\frac{C}{6!}f_{(\eta)}^{(6)} \quad , \quad -1<\eta<1 \qquad (6.44)$$

بطوريكه C ضريب ثابت خطا عبارتست از :

$$C=\int_{-1}^{1} x^6dx-(\lambda_0 x_0^6+\lambda_1 x_1^6+\lambda_2 x_2^6)=\frac{2}{7}-\frac{6}{25}=\frac{8}{175}$$

بنابراين مي دانيم كه گره ها انتگرال گيري x_k ريشه هاي چندجمله اي لژاندر مي باشند يعني :

$$p_{n+1}(x)=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x^2-1)^{n+1}\right] \quad , \quad ,n=0,1,... \qquad (6.45)$$

حال در جدول زير ريشه هاي چند جمله اي لژاندر براي $n=1(1)5$ براي روش (٤١-٦) بصورت زير داريم :

n	x_k	λ_k

1	± 0.5773502692 0.00000000	1 0.8888888889
2	± 0.7745966692 ± 0.3399810436	± 0.5555555556 0.6521451549
3	± 0.8611363116 0.0000000000	0.3478548481 0.5688888889
4	± 0.5384693101 ± 0.9061798459	0.4786286705 0.2369268851
5	± 0.2386191861 ± 0.6612093865 ± 0.93246995142	0.4679139346 0.3607615730 0.1713244924

مثال ٦-٥ : با استفاده از روش گاوس - لژاندر انتگرال زیر را محاسبه کنید :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

حل : ابتدا بازه [0,1] را به [-1,1] تبدیل مي كـــنيم.

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{t+3}$$

با استفاده از روش گاوس لژاندر سه نقطه اي (n=2) داریم :

$$I = \frac{1}{9}\left[8\left(\frac{1}{0+3}\right) + 5\left(\frac{1}{3+\sqrt{3/5}}\right) + 5\left(\frac{1}{3-\sqrt{3/5}}\right)\right] = \frac{131}{189} = 0.675774$$

درصورتیکه جواب واقعي انتگرال فوق عبارتست از I=0.675774

مثال ٦-٦ : در روش زیر c,b,a را بطریقي بیابید که حتي الامکان برای چندجمله ایهاي درجه بالا دقیق باشد و خطاي روش را بیابید ؟

$$\int_0^h f(x)dx = h\{af(0) + bf(h/3) + cf(h)\}$$

حل : f(x) را تا چندجمله اي درجه دوم درنظر مي گيريم داريم

$$f(x)=1 \quad ; \quad h=h(a+b+c) \quad or \quad a+b+c=1 \qquad (1)$$

$$f(x)=x \quad ; \quad \frac{h^2}{2}=h(\frac{bh}{3}+ch) \quad or \quad \frac{1}{3}b+c=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

$$f(x)=x^2 \quad ; \quad \frac{h^3}{3}=h(\frac{bh^2}{9}+ch^2) \quad or \quad \frac{1}{9}b+c=\frac{1}{3} \qquad (3)$$

دستگاه سه معادله و سه مجهول بالا را حل مي كنيم :

$$a=0 \ , \ b=\frac{3}{4} \ , \ c=\frac{1}{4}$$

براي محاسبه خطا موضعي يا قطع كردن داريم :

$$R_2=\frac{c}{3!}f'''(h) \quad , \quad 0<\zeta<h$$

$$c=\int_0^h x^3dx-h\left[\frac{bh^3}{27}+ch^3\right]=\frac{-h^4}{36}$$

$$\therefore R_2=\frac{-h^4}{216}f'''(\zeta)=0(h^4)$$

تمرين هاي فصل :

۱-مطلوبست محاسبه $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x\ln(\sin x)}{\sin^2 x+1}$ باروش ذوزنقه .

۲-مطلوبست محاسبه $\int_0^{0.8}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)dx$ باسيمپسون با گامهاى٤/. و ۲/. و ۳/.

۳-A مساحت سطحي است محصور به منحني $y^2+x^2=\cos x$ و بوسيله انتگرال زير تعريف شده است :

$$A=4\int_0^{\alpha}(\cos x-x^2)^{1/2}dx$$

بطوريكه α ريشه مثبت معادله $\cos x=x^2$ است .

الف : α را تا سه رقم اعشار صحيح محاسبه كنيد .

ب : با استفاده از روش رامبرگ A را محاسبه کنید بطوریکه خطاي مطلق محاسبه کمتر از 0.05 باشد .

٤- در فرمول زیر ضرائب را تعیین کنید .

$$\int_0^{2h^{-1/2}} xf(x)dx = (2h)^{1/2}[A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h)] + R$$

پس R را نیز بیابید در صورتیکه $f'''(x)$ ثابت باشد .

فصل هفتم

۷ - حل عددي معادلات ديفرانسيل معمولي

۱-۷ مقدمه : بسياري از مسائل رياضيات كاربردي ، به معادلات ديفرانسيل معمولي منجر ميشوند .يك معادله ديفرانسيل معمولي ، رابطه اي است بين يك تابع و مشتقات آن ومتغير مستقل آن .كلي ترين فرم يك معادله ديفرانسيل معمولي را مي توان بصورت زير نوشت :

$$\phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (7.1)$$

y ومشتقات آن توابعي از x هستند و n بيانگر بالاترين مرتبه مشتق y نسبت به x است .مرتبه يك معادله ديفرانسيل عبارتست از بالاترين مرتبه مشتق آن و درجه يك معادله ديفرانسيل عبارتست از درجه بالاترين مرتبه مشتق . بعد از گوياسازي معادله مزبور هرگاه حاصل ضرب تابع وابسته y(x) با خودش و يا يكي از مشتقاتش در معادله بروز نكند معادله ديفرانسيل را خطي ودرغير اينصورت غير خطي مي ناميم .

۲-۷- وجود جواب و يكتايي جواب :

ماهيت جواب معادله ديفرانسيل از لحاظ وجود جواب و هم چنين قادر بودن ما براي به دست آورده جواب تقريبي دقيقي براي آن به ماهيت و رفتار تابع f مربوط است . اساساً اگر f به اندازه كافي هموار باشد آنگاه جواب منحصربفردي براي معادله وجود خواهد داشت .لذا ما مي توانيم جواب تقريبي با دقت هاي متفاوت براي معادله بيابيم .به هرحال راه هاي متفاوتي براي بيان «هموار بودن» وجود دارد كه ما دو راه رادرنظر مي گيريم .اول پيوستگي ليپ شيتس (Libschitz Continuity) ودوم ، هموار و يكنوا نزولي(Smooth and monotone decreasing) uniformly دومين راه حل عموماً براي ايجاد جواب مسئله مقدار اوليه درنظرگرفته ميشود كه يك شرط ضعيف است .حال به تعاريف زير مي پردازيم :

تعريف پيوستگي ليپ شيتس :

فرض مي كنيم g يك تابع از R به توي R باشد . g را تابع پيوسته ليپ شيتس در بازه I مي ناميم هرگاه يك ثابت k وجود داشته باشد بطوريكه به ازاي هر $x_1, x_2 \in I$ داشته باشيم :

$$|g(x_1) - g(x_2)| \le k|x_1 - x_2| \qquad (7.8)$$

تعريف هموار و يكنوا نزولي : فرض مي كنيم g يك تابع از R به توي R باشد .g را تابع هموار و يكنوا نزولي مي ناميم هرگاه g مشتق پذير باشد ومشتق آن به ازاي همه مقادير x در رابطه زير صدق نمايد .

$$-M \le g'(x) \le -m < 0 \qquad (7.9)$$

در رابطه فوق mوM ثابتهاي مثبت داده شده هستند .

حال در موقعيتي هستيم كه به قضاياي وجود جواب ويكتايي جواب مسئله مقدار اوليه به پردازيم .

قضيه : فرض مي كنيم R يك ناحيه باز مستطيلي باشد $R=\{(x,y): a \le x \le b, c<y<d\}$ هرگاه تابع f به ازاي جميع مقادير $(x,y)\in R$ پيوسته باشد وهم چنين نسبت به y پيوستگي ليپ شيتس با ثابت k داشته باشد .آنگاه مسئله مقدار اوليه $y'=f(x,y)\,,\, y(x_0)=y_0$

به ازاي جميع مقادير $(x_0,y_0)\in R$ داراي جواب منحصربفرد خواهد بود .مضافاً اينكه : هرگاه z(x) جواب مسئله مقدار اوليه فوق با شرايط اوليه $z(x_0)=z_0$ باشد آنگاه : $|y(x)-z(x)| \le e^{k(x-x_0)}|y_0-z_0|$

چنانچه بخواهيم شرايط بيشتري را بر روي تابع f قائل شويم ، قضيه زير را داريم .

قضيه : هرگاه تابع f به ازاي جميع مقادير متعلق به ناحيه باز مستطيلي R ، $(x,y)\in R$ پيوسته باشد وهم چنين نسبت به y هموار و يكنوانزولي باشد . آنگاه مسئله مقدار اوليه $y'=f(x,y)\,,\, y(x_0)=y_0$ به ازاي جميع مقادير $(x_0,y_0)\in R$ داراي جواب منحصرد بفرد است .

مضافاً اينكه : هرگاه z(x) جواب مسئله مقدار اوليه مزبور با شرايط اوليه $z(x_0)=z_0$ باشد آنگاه :

$$|y(x)-z(x)| \le e^{-m(x-x_0)}|y_0-z_0|$$

در اينجا m ثابت كران بالا يكنوايي در رابطه (7.9) است .

اثبات دو قضيه فوق مي توان در كتب نظريه معادلات ديفرانسيل معمولي يافت ، اثبات اين قضايا مربوط به درس ما نمي باشد .لذا از اين به بعد مسائل مقدار اوليه اي را كه درنظر مي گيريم فرض مي كنيم كه داراي جواب

منحصربفرد هستند وهم چنین فرض مي کنیم که تابع f(x,y) داراي مشتقات نسبي پیوسته نسبت به y,x مي باشد .

در این قسمت ما به بررسي حل عددي مسئله مقدار اولیه (I.V.P) مي پردازیم .

۳-۷ روشهاي عددي براي حل مسائل مقداراولیه:

مسئله مقدار اولیه زیر را درنظر مي گیریم

$$y' = f(x, y) \quad , \quad a \le x \le b \quad , \quad y(a) = \alpha \qquad (7.12)$$

دراین رابطه α, b, a اعداد ثابتي هستند .ابتدا فاصله [a ,b] را به n زیرفاصله مساوي افراز مي کنیم (مي توان زیر فاصله هاي نامتساوي الفاصله رانیز درنظر گرفت) بنابراین ما درصدد یافتن جواب(12-۷) در نقاط زیر هستیم .

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

نقاط فوق را نقاط گره اي یا شبکه اي مي نامند نقاط فوق را مي توان بصورت زیر هم درنظر گرفته شوند

$$x_j = x_0 + jh \ , \ j = 0(1)n$$

بطوریکه

$$h = \frac{b - a}{n}$$

در روشـــــهاي عددي ما عدد y_j را که درواقع یك جواب تقریبي براي جواب تحلیلي $y(x)$ در نقطه x_j مي باشد مي یابیم .لذا مجموعه $\{y_j\}$ یعني $y_0, y_1, \ldots, y_n$ حل هاي عددي مسئله مقدار اولیه (12-۷) مي باشند .اعداد $\{y_j\}$ از یك مجموعه معادلات جبري که معادلات تفاضلي نامیده میشود محاسبه مي کنیم .تقریبهاي تفاضلي فراواني براي حل معادله دیفرانسیل داده شده فوق وجود دارد .این روشها را مي توان بطور اجمالي به دو دسته کلي تقسیم نمود:

۱-روشهاي تك گامي

۲-روشهاي چندگامي

در این جا ما فقط به روشهاي تك گامي مي پردازیم .روشهاي تك گامي را نیز مي توان به دو دسته تقسیم کرد اول روشهاي تك گامي صریح و دوم روشهاي تك گامي ضمني .فرم کلي روشهاي تك گامي صریح عبارتند از:

$$y_{j+1} = y_j + h\phi(x_j, y_j, h) \quad , \quad j = 0(1)n-1 \qquad (7.13)$$

تابع ϕ را تابع تصحیح مي نامند وبه تابع f وگام h ونقاط شبكه وابسته است. خطاي برشي يا Truncate روش تك گامي را در حالت كلي بصورت زير تعريف مي كنيم

$$T_{j+1} = y(x_{j+1}) - y(x_j) - h\phi(x_j + y(x_i), h) \quad , \quad (7.14)$$

تعريف مرتبه دقت يك روش تك گامي :

بزرگترين رقمي نظير p كه در رابطه ذيل صدق مي نمايد را مرتبه دقت روش تك گامي مي نامند .

$$\left|h^{-1}T_{j+1}\right| \le O(h^p)$$

۷-۷- روش اويلر:

مسئله (۷-12) را در نقاط $x=x_j$ درنظر مي گيريم .

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_j} = f(x_j, y(x_j)) \qquad (7.15)$$

در اين رابطه اگر مشتق مرتبه اول رابا يك فرمول مشتق گيري براساس تفاضل پيشرو مرتبه اول تقريب بزنيم داريم

$$\frac{\Delta y(x_j)}{h} + \text{خطا} = f(x_j, y(x_j)) \qquad j = 0(1)n$$

$$\frac{y(x_{j+1}) - y(x_j)}{h} + \text{خطا} = f(x_j, y(x_j))$$

با ناديده گرفتن جمله خطا داريم

$$y_{j+1} - y_j = hf(x_j, y_j) \;,\; j = 0(1)n-1$$

يا

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) \;,\; j = 0(1)n-1 \qquad (7.16)$$

روش (۷-16) فرمول اويلر است كه ساده ترين روش صريح تك گامي است . اين روش نيز روش آدامز-بشفورث مرتبه اول ناميده ميشود . اين روش را در نقاط گره اي $j=0(1)n-1$ و x_j بكار گرفته ميشود تا جوابهاي عددي مسئله مقدار اوليه داده شده را محاسبه نمائيم .

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &. \\ &. \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

با انتخاب گام h و شرایط اولیه داده شده مي توان y_1 را محاسبه کرد وسپس به آساني y_2 تا y_n قابل محاسبه هستند.

خطاي برشي يا موضعي (Local truncation error)

خطاي تقريب كه تفاضل بين جواب تحليلي مسئله در نقطه $x=x_{j+1}$ و جواب y_{j+1} كه از روش (16-۷) وبا استفاده حساب دقيق بدست مي آيد را خطاي برشي يا موضعي يا خطاي گسسته سازي ناميده ميشود.لذا داريم :

$$T_{j+1} = y(x_{j+1}) - y_{j+1} \ , \ i = 0(1)n-1$$

$$T_{j+1} = y(x_{j+1}) - y(x_j) - hf(x_i, y(x_i))$$

با استفاده از بسط سري تيلور حول x_j ورابطه (۷-۱۵) داريم :

$$T_{j+1} = \frac{h^2}{2} y''(\zeta) \ , \ x_j < \zeta < x_{j+1}$$

اگر فرض كنيم $\underset{[a,b]}{Max}|y''(\zeta)| = M_2 \ , \ \underset{[a,b]}{Max}|T_{j+1}| = T$ باشند از رابطه فوق نتيجه مي گيريم :

$$T \le \frac{h^2}{2} M_2 \qquad (7.17)$$

لذا نتيجه مي گيريم كه مرتبه خطاي برشي موضعي $O(h^2)$ وقتيكه $h \to 0$. در روند محاسبات دقيق و حساب دقيق در روش اويلر y_j را مي يابيم واما در محاسبات عددي بعلت تأثير خطاي روند كردن عملاً y_j بدست نمي آيد .

از آنجا كه $T = O(h^2)$ كران خطا كاهش مي يابد زماني كه h كاهش مي يابد .اما تا زماني كه خطاي روند كردن غلبه نكند .از يك نقطه اي به بعد كران بالا افزايش مي يابد چنانچه h را كاهش دهيم .

مثال ۷-۱ : با استفاده از روش اويلر مسئله مقدار اوليه زير را با گام $h = 0.1, h = 0.2$ و h=0.05 در بازه [0,1] حل كنيد . با ناديده گرفته خطاي گردكردن (روند كردن) كراني براي خطا بيابيد؟

$$y' = -2xy^2 \ , \ y(0) = 1$$

حل : با استفاده از روش اويلر داريم وبا گام h=0.2 :

$$y_{j+1} = y_j - 2x_j.hy_j^2 \quad , \quad j = 0(1)4$$

$$j = 0\,,\, x_0 = 0\,,\, y_0 = 1$$

$$y(0.2) \approx y_1 = y_0 - 2hx_0y_0^2 = 1$$

$$j = 1\,,\, x_1 = 0.2\,,\, y_1 = 1$$

$$y(0.4) \approx y_2 = y_1 - 2hx_1y_1^2 = 1 - 2(0.2)(0.2)(1)^2 = 0.92$$

$$j = 2\,,\, x_2 = 0.4\,,\, y_2 = 0.92$$

$$y(0.6) = y_3 = y_2 - 2hx_2y_2^2 = 0.92 - 2(0.2)(0.4)(0.92)^2 = 0.78458$$

بر همين اساس مقادير ديگر جواب عبارتند از :

$$y(0.8) \approx y_4 = 0.63684$$

$$y(1) \approx y_5 = 0.50706$$

حال اگر گام h=0.1 باشد j=0(1)9 خواهد بود لذا داريم :

$y(0.1) \approx y_1 = 1.0$ $\qquad$ $y(0.2) \approx y_2 = 0.98$

$y(0.3) \approx y_3 = 0.94158$ $\qquad$ $y(0.4) \approx y_4 = 0.88839$

$y(0.5) \approx y_5 = 0.82525$ $\qquad$ $y(0.6) \approx y_6 = 0.75715$

$y(0.7) \approx y_7 = 0.68835$ $\qquad$ $y(0.8) \approx y_8 = 0.62202$

$y(0.9) \approx y_9 = 0.56011$ $\qquad$ $y(1) \approx y_{10} = 0.50364$

وسرانجام براي گام h=0.05 داريم :

$y(0.05) \approx y_1 = 1$ $\qquad$ $y(0.1) \approx y_2 = 0.995$

. $\qquad$.

. $\qquad$.

$y(0.95) \approx y_{19} = 0.52831$ $\qquad$ $y(1) \approx y_{20} = 0.50179$

خطاي برشي اويلر عبارتست از :

$$T = \frac{h^2}{2} y''(\zeta)$$

$$|T| = \frac{h^2}{2}|y''(\zeta)| \le \frac{h^2}{2} \max_{[0,1]} |y''(x)|$$

از آنجا كه جواب دقيق مسئله $y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ است داريم :

$$|T| \le \frac{h^2}{2} \max_{0 \le x \le 1} \left| \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} \right| \le h^2$$

٧-٤- روش سري تيلور

فرض مي كنيم y(x) را مي توان با سري تيلور حول نقطه x_j بسط دهيم .

$$y(x) = y(x_j) + (x - x_j)y'(x_j) + \frac{1}{2!}(x - x_j)^2 y''(x_j) + \dots$$
$$+ \frac{1}{p!}(x - x_j)^p y^{(p)}(x_j) + \frac{1}{(p+1)!}(x - x_j)^{p+1} y^{(p+1)}(x_j + \theta h) \qquad (7.18)$$

اين بسط براي $0 < \theta < 1, x \in [a,b]$ برقرار است . چنانچه $x = x_{j+1}$ را در رابطه فوق جايگزين كنيم داريم :

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \dots + \frac{1}{p!} h^p y^{(p)}(x_j) + \frac{1}{(p+1)!} h^{p+1} y^{p+1}(x_j + \theta h)$$

رابطه زير را تعريف مي كنيم :

$$h\phi(x_j, y(x_j), h) = hy'(x_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_j) + \dots + \frac{1}{p!} h^p y^{(p)}(x_j)$$

با جايگزيني جواب تقريبي y_j بجاي جواب دقيق $y(x_j)$ مي توان عبارت $h\phi(x_j, y_j, h)$ را از عبارت $h\phi(x_j, y(x_j), h)$ بدست آورد. لذا براي محاسبه تقريب y_j عبارت زير را داريم :

$$y_{j+1} = y_j + h\phi(x_j, y_j, h) \quad , \quad j = 0(1)n-1 \qquad (7.19)$$

اين روش را روش سري تيلور مرتبه p ام مي نامند . اگر در رابطه (۷-۱۹) ، p=1 باشد روش اويلر را خواهيم داشت :

$$y_{j+1} = y_j + hy'_j = y_j = hf(x_j, y_j) \qquad j = 0(1)n-1$$

براي اينكه بتوانيم از روش (۷-۱۹) استفاده كنيم نياز است كه $y'(x_j), y(x_j)$ تا $y^{(p)}(x_j)$ را تعيين نمائيم . اگر $y(x_j), x_j$ معلوم باشند آنگاه مشتقات مراتب مختلف آن را مي توان محاسبه كرد . ابتدا مقادير معلوم $y(x_j), x_j$ را در معادله ديفرانسيل داده شده قرار ميدهيم بنابراين داريم :

$$y'(x_j) = f(x_j, y(x_j))$$

ثانياً از معادله ديفرانسيل (۷-12) مشتق مي گيريم تا مشتقات مراتب بالاتر y(x) را بيابيم لذا داريم :

$$y' = f(x, y)$$
$$y'' = f_x + ff_y$$
$$y''' = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y(f_x + ff_y)$$

.

.

$..., f_y, f_x$ بيانگر مشتقات نسبي f نسبت به y,x واخ مي باشد .مقادير $y'''(x_j), y''(x_j)$ و . . . را مي توان با جايگزيني x=(xj) محاسبه كرد .بنابراين اگر $y(x_j), x_j$ دقيقاً معلوم باشند آنگاه روش (۸-19) را مي توان براي محاسبه y_{j+1} بكار برد وخطاي آن عبارتست از :

$$\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(x_j + \theta h)$$

تعداد جملاتي را كه بايستي در رابطه (۸-19) بكار گرفته شوند بوسيله خطاي قابل اغماض تعيين مي شود. اگر اين خطا ε باشد و سري در جمله $y^{(p)}{}_{(xj)}$ قطع گردد آنگاه

$$h^{p+1} \left| y^{(p+1)}(x_j + \theta h) \right| < (p+1)! \varepsilon$$

$$h^{p+1} \left| f^{(p)}(x_j + \theta h) \right| < (p+1)! \varepsilon \qquad , (7.20) \quad \text{يا}$$

براي يك h از رابطه فوق مي توان p را بدست آورد و اگر p از پيش معلوم باشد ميتوان كراني براي h بيابيم. از آنجا كه $x_j + h\theta$ معلوم نيست ، لذا $\left| f^{(p)}(x_j + \theta h) \right|$ در رابطه (۷.20) با مقدار ماكزيم درباره [a,b] جايگزين مي گردد

مثال ۷-۲ :

مسئله مقدار اوليه : $y' = x^2 + y^2 \ , \ y(0) = 0$ مفروض است. سه جمله اول ناصفر در بسط سري تيلور $y_{(x)}$ را بيابيد و مقدار $y(1)$ را محاسبه كنيد. هم چنين x اي را بيابيد كه خطاي در $y(x)$ كه از دو جمله اول ناصفر بدست مي آيد از 10^{-6} كمتر باشد.

حل :

$$y_{(0)} = 0 \qquad , y'_{(0)} = 0$$

$$y'' = 2x + 2yy' \quad , \ y''_{(0)} = 0$$

$$y''' = 2 + 2(yy'' + y'^2) \quad , \ y'''_{(0)} = 2$$

$$y^{(4)}{}_{(0)} = y^{(5)}{}_{(0)} = y^{(6)}{}_{(0)} = 0$$

$$y^{(7)} = 2(yy^{(6)} + 6y'y^{(5)} + 15y''y^{(4)} + 10(y''')^2) \quad . \ y^{(7)}{}_{(0)} = 80$$

$$y^{(8)}{}_{(0)} = y^{(9)}{}_{(0)} = y^{(10)}{}_{(0)} = 0$$
$$y^{(11)} = 2[yy^{(10)} + 10y'y^{(9)} + 45y''y^{(8)} + 120y'''y^{(7)} + 210y^{(4)}y^{(6)}$$
$$+126(y^{(5)})^2]$$
$$y^{(11)}{}_{(0)} = 38400$$

بسط سري تيلور $y(x)$ عبارتست:

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11}$$

براي تقريب $y(1)$ داريم

$$y(1) \approx 0.3502$$

اگر فقط دو جمله ناصفر بكار گرفته شود، آنگاه مقدار x را از رابطه زير مي يابيم.

$$\left|\frac{2}{2049}x^{11}\right| < 0.5 \times 10^{-7}$$

باحل آن داريم $x \approx 0.41$

۷-۵ روشهاي رانگ - كوتا :

روشهاي تيلور كه قبلاً بحث شد داراي ويژگي مناسبي هستند و آن همانا خطاي برش موضعي مرتبه بالا آنهاست. ولي نياز به محاسبه مشتقات f(x,y) در بسياري از مسائل مي تواند پيچيده و ملال آور باشد بنابراين از روش تيلور به ندرت استفاده مي گردد. ما ابتدا اصول اساسي روشهاي رانگ-كوتا را بيان مي كنيم. با استفاده از قضيه مقدار ميانگين داريم:

$$y\ (x_{j+1}) = y(x_j) + hy'(x_j + \theta h)$$
$$= y(x_j) + hf((x_j + \theta h), y(x_j + \theta h)) \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

به ازاي $\theta = \frac{1}{2}$ داريم :

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + hf(x_j + \frac{h}{2}, y(x_j + \frac{h}{2}))$$

روش اويلر با نصف گام $h/2$ داريم

$$y(x_j + \frac{h}{2}) \approx y_j + \frac{h}{2}f_j$$

بنابراين تقريب زير را داريم:

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}\ ,\ \ y_j + \frac{h}{2} f_j)$$

رابطه فوق را مي توان به صورت زير نيز نوشت

$$K_1 = hf_j$$

$$K_2 = hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{1}{2}K_1)$$

$$y_{j+1} = y_j + K_2 \qquad (7.21)$$

اين روش را روش اويلر با نصف گام مي نامند .

حال با استفاده از روش اويلر مي توان روند زير را نيز بررسي كرد

$$y'(x_j + \frac{h}{2}) \approx \frac{1}{2}\left[y'(x_j) + y'(x_j + h)\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_j + hf_i)\right]$$

بنابراين تقريب ذيل را خواهيم داشت :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_j + hf_i)\right] \qquad (7.22)$$

اين روش را مي توان بفرم زير نيز نوشت :

$$K_1 = hf(x_j, y_j)$$

$$K_2 = hf(x_j + h, y_j + K_1)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\ ,\ \ j = 0(1)n-1 \qquad (7.23)$$

اين روش را روش كوشي - اويلر مي نامند .

روشهاي (21-۷) و(23-7) را مي توان بصورت زير تعبير نمود

$y_{j+1} = y_j + h$ (متوسط ضريب زاويه) (7.24)

اين اساس ايده روشهاي رانگ-كوتا مي باشند . به طور عمومي در روشهاي رانگ- كوتا ما ضريب زاويه را در نقطه x_j و ساير نقاط ديگر مي يابيم و متوسط اين ضريب زاويه ها را درگام h ضرب مي نمائيم و به جواب y_j اضافه مي كنيم.بنابراين روشهاي رانگ - كوتا را مي توان به صورت كلي ذيل تعريف كرد .

روشهاي رانگ - كوتا

روش رانگ - كوتا با V ضريب زاويه را ميتوان بصورت زير تعريف كرد

$$K_1 = hf(x_j y_j)$$
$$K_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1)$$
$$k_3 = hf(x_j + c_3 h\ ,\ y_j + a_{31} k_1 + a_{32} k_2)$$
$$k_4 = hf(x_j + c_4 h\ ,\ y_j + a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)$$
.
.
.
$$k_v = hf(x_j + c_v h\ ,\ y_j + \sum_{i=1}^{v-1} a_{vi} k_i$$
$$y_{j+1} = y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 + ... + w_v k_v$$
$$\sum_{i=1}^{v} w_i = 1 \qquad (7.30)$$

در فرمول (۷-30) تابع تصحيح عبارتست از تركيب خطي ضريب زاويه ها درنقطه x_j و تعداد ديگر نقاط كه در بين x_j و x_{j+1} قرار دارند. بادانستن طرف راست (۷.30) مي توان y_{j+1}را به آساني محاسبه كرد بنابراين روش رانگ - كوتا (۷.30) يك روش صريح v ضريب زاويه اي است. براي تعيين c ها، a ها و wها در (7-30) ما y_{j+1} را بصورت سري تواني h بسط ميدهيم بطوريكه با بسط سري تيلور جواب معادله ديفرانسيل تا تعداد معيني از جملات منطبق باشد. براي آساني كار در ذيل نحوه بدست آوردن aها و cها و wها را براي روش مرتبه دوم با جزئيات بحث و بررسي مي كنيم.

روش مرتبه دوم

روش رانگ - كوتا دوضريب زاويه زير را مدنظر قرار ميدهيم.

$$k_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$k_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} k_1)$$
$$y_{j+1} = y_j + w_1 k_1 + w_2 k_2 \qquad (7.31)$$

پارامترهاي w_2, w_1, a_{21}, c_2 بطريقي مي يابيم تا y_{j+1} به $y(x_{j+1})$ نزديكتر گردد. بنابراين بسط سري تيلور جواب معادله ديفرانسيل $y(x_{j+1})$ رابا. y_{j+1} مقايسه مي كنيم و ضرائب توانهاي مختلف h را متحد هم قرار ميدهيم و روابط زير را مي يابيم :

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ c_2 w_2 = 1/2 \\ a_{21} w_2 = 1/2 \end{cases}$$

جواب دستگاه فوق عبارتست از $w_1 = 1 - \frac{1}{2c_2}, w_2 = \frac{1}{2c_2}, a_{21} = c_2$ بطوریکه $c_2 \neq 0$ ،پارامترآزادمي باشد.

خطاي برشي عبارتست از :

$$T_{j+1} = y(x_{j+1}) - y_{j+1} = h^3\left[(\frac{1}{6} - \frac{c_2}{4})(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy})x_j + \frac{1}{6}\{f_y(f_x + ff_y)\}_{x_j} + \ldots \right] \qquad (7.32)$$

اين رابطه نشان مي دهد كه روش (7.31) داراي دقت مرتبه دوم است .پارامتر آزاد c_2 معمولاً بين صفر و يك انتخاب مي گردد .برخي اوقات c_2رابطريقي انتخاب مي كنيم كه يكي از w هارا در(7.31) صفر شوند بعنوان مثال اگر $C_2 = \frac{1}{2}$ انتخاب شود $w_1=0$ مي گردد .

(a) اگر $C_2 = \frac{1}{2}$ انتخاب شود روش كلاسيك را داريم :

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f_j) \;,\; j = 0(1)n-1 \qquad (7.33)$$

اين رابطه همان روش نصف گام اويلر است .

(b) اگر $c_2=1$ بعنوان پارامتر آزاد انتخاب كنيم داريم :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_j) + f(x_j + h, y_i + hf_i) \right] \;,\; j = 0(1)n-1 \qquad (7.34)$$

اين روش همان روش كوشي اويلر است كه قبلاً بحث كرديم .

(c)اگر $c_2 = \frac{2}{3}$ انتخاب شود يعني ضريب جملاتي از خطاي قطع كردن را صفر بسازيم روشي را بدست خواهيم آورد، روش رانگ-كوتا مرتبه دوم بهينه مي باشد .

$$w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{3}{4}$$
$$K_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$K_2 = hf(x_j + \frac{2}{3}h, y_j + \frac{2}{3}K_1)$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{4}(K_1 + 3K_2) \;,\; j = 0(1)n-1 \qquad (7.35)$$

روشهاي رانگ - كوتا مرتبه سوم :

$$K_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$K_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} K_1)$$
$$K_3 = hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31} K_1 + a_{32} K_2)$$
$$y_{j+1} = y_j + w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_3 \qquad j = 0(1)n-1$$

نظير روش مرتبه دوم مي توان a هاي و c ها و w ها را محاسبه كرد. چنانچه $c_2 = \frac{1}{2}$ بعنوان پارامتر آزاد انتخاب كنيم. روشي كه مي يابيم روش كلاسيك مرتبه سوم رانگ - كوتا مي باشد.

$$c_2 = a_{21} = \frac{1}{2}, c_3 = 1, a_{31} = -1, a_{32} = 2, w_1 = w_3 = \frac{1}{6}, w_2 = \frac{4}{6}$$
$$K_1 = hf(x_j + y_j)$$
$$K_2 = hf(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}K_1)$$
$$K_3 = hf(x_j + h, y_j - K_1 + 2K_2)$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)\ ,\ j = 0(1)n-1 \qquad (7.36)$$

روش هاي مرتبه چهارم رانگ - كوتا

$$K_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$K_2 = hf(x_j + c_2 h, y_j + a_{21} K_1)$$
$$K_3 = hf(x_j + c_3 h, y_j + a_{31} K_1 + a_{32} K_2)$$
$$K_4 = hf(x_j + c_4 h, y_j + a_{41} K_1 + a_{42} K_2 + a_{43} K_3)$$
$$y_{j+1} = y_j + w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_3 + w_4 K_4 \qquad j = 0(1)n-1$$

باز هم نظير روند فوق عمل مي كنيم c ها ، a ها و w ها را مي يابيم در اينجا ما فقط ۱۱ رابطه را بدست مي آوريم اما تعداد مجهولات ۱۳ مي باشد ، با انتخاب پارامتر آزاد برابر ۱/۲ مجهولات را بصورت زير مي توان محاسبه كرد. لذا روش كلاسيك مرتبه چهارم رانگ - كوتا را خواهيم داشت :

$$c_2 = a_{21} = c_3 = a_{32} = \frac{1}{2}$$
$$a_{31} = 0$$
$$c_4 = 1 \quad a_{41} = a_{42} = 0 \quad a_{43} = 1$$
$$w_1 = \frac{1}{6} \quad w_2 = \frac{2}{6} \quad w_3 = \frac{2}{6} \quad w_4 = \frac{1}{6}$$

روش كلاسيك مرتبه چهارم رانگ - كوتا

$$K_1 = hf(x_j, y_j)$$
$$K_2 = hfx_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}K_1$$
$$K_3 = hf(x_j + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}K_2)$$
$$K_4 = hf(x_j + h, y_j + K_3)$$
$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}[K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \qquad j = 0(1)n-1 \qquad (7.37)$$

مثال ۷-۳ : مسئله مقدار اولیه ذیل را با روش مرتبه چهارم کلاسیک رانگ-کوتا با گام h=0.2 حل کنید ؟

$$y' = -2xy^2 \text{ , } y(0) = 1 \text{ , } 0 \le x \le 1$$
$$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{0.2} = 5$$
$$x_j = 0 + jh \qquad j = 0(1)5$$
$$x_0 = 0 \text{ , } x_1 = 0.2 \text{ , } x_2 = 0.4 \text{ , } x_3 = 0.6 \text{ , } x_4 = 0.8 \text{ , } x_5 = 1$$
$$For \;\; j = 0 \qquad K_1 = hf(x_0, y_0) = -2(0.2)(0)(1)^2 = 0$$
$$K_2 = hf(x_j + \frac{1}{2}h \text{ , } y_0 + \frac{1}{2}K_1) = -2(0.2)(\frac{0.2}{2})(1)^2 = -0.04$$
$$K_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}K_2) = -2(0.2)(\frac{0.2}{2})(0.98)^2 = -0.038416$$
$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3) = -2(0.2)(0.2)(0.961584)^2 = -0.0739715$$
$$y(0.2) \approx y_1 = 1 + \frac{1}{6}[0 - 0.8 - 0.076832 - 0.0739715] = 0.9615328$$
$$For \;\; j = 1$$
$$K_1 = -0.0739636$$
$$K_2 = -0.1025754$$
$$K_3 = -0.0994255$$
$$K_4 = -0.1189166$$

بر همین اساس :

$$y(0.4) \approx y_2 = 0.8620525$$
$$y(0.6) \approx y_3 = 0.7352784$$
$$y(0.8) \approx y_4 = 0.6097519$$
$$y(1.0) \approx y_5 = 0.5000073$$

تمرینات فصل

۱- مسئله مقدار اولیه مفروض است . $y' = 1 + x\sin y \ , \ 0 \le x \le 2 \ , y(0) = 0$ را با گام h=0.2 با کلیه روشها فوق الذکر حل کنید؟

۲- مسئله مقدار اولیه زیر را با گام h=0.5 با روشهاي مراتب دوم و سوم و چهارم رانگ- کوتا حل کنید؟

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2 e^x \ , \ 1 \le x \le 2 \quad y(1) = 0$$

۳- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است : $y' = x + y \ , \ y(0) = 1 \, , x \in [0,1]$ این مسئله را با گام h=0.1 با تمامي روشهاي فوق الذکر حل کنید خطاي این روشها را در نقاط گره اي بیابید وبا روشهاي دیگر مقایسه کنید؟

٤- مسئله مقدار اولیه زیر مفروض است : $y' = y - x^2 + 1 \ , 0 \le x \le 2 \, , y(0) = 0.5$ با گام h=0.1 با روشهاي مرتبه دوم و چهارم تیلور حل کنید .خطاي روش را در نقاط گره اي بیابد؟

٥- مسئله مقدار اولیه $y' = xe^{3x} - 2y \, , 0 \le x \le 1 \, , y(0) = 0$ را با گام h=0.5 با روشهاي مرتبه دوم و چهارم تیلور حل کنید؟

٦- با استفاده از روش تیلور مرتبه دوم وبا گام h=0.1 مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید؟

$$y' = 1 + x\sin xy \, , 0 \le x \le 2 \, , y(0) = 0$$

۷- مسائل مثالها ٤و٥و٦ را با طول گامهاي مندرج شده فوق با سایر روشهاي فصل حل کنید؟

فصل هشتم

۸- تقریب Approximation

بطورکلي چند جمله اي ها ، توابع مثلثاتي ، نمايي وگويا از دسته توابعي هستند که عموماً براي تقريب توابع مورد استفاده قرار مي گيرند .از بين اين توابع ، چند جمله ايها بعلت کاربردشان بيشتر از بقيه مورد استفاده قرار مي گيرند .وجود يك چند جمله اي p(x) که تابع پيوسته f(x) را در يك بازه متناهي [a,b] تقريب مي زند .از قضيه « واير اشتراس» که در ابتداي فصل قبل بيان کرديم تضمين مي گردد .

براي پيدا کردن تقريب يك تابع f(x) عبارت زير را مدنظر قرار ميدهيم

$$f(x) \approx p(x, e_0, e_1, ..., e_n) = e_0\phi_0(x) + e_1\phi_1(x) + ... + e_n\phi_n(x) \qquad (8.1)$$

$\phi_i(x)$ براي i=0(1)n توابعي هستند که بطريقي انتخاب شده اند که مستقل خطي هستند و C_i ها پارامترهاي ثابتي هستند که بايستي تعيين شوند . $\phi_i(x)$ را توابع Coordinate ناميده مي شوند و معمولاً بفرم $\phi_i(x) = x^i, i = 0(1)n$ براي تقريب با چندجمله اي انتخاب مي شوند خطاي تقريب بصورت زير تعريف مي شود

$$E(f,x) = \left\| f(x) - (C_o\phi_0(x) + C_1\phi_1(x) + ... + C_n\phi_n(x) \right\| \qquad (8.2)$$

بطوريکه $\|.\|$ يك نرم تعريف شده است . مسئله تقريب عبارتست از تعيين C_i ها بطوريکه خطاي تقريب درحد امکان کم وکمتر گردد با استفاده از نرم افزارهاي مختلف تقريبهاي مختلفي را مي توان يافت .هنگاميکه نرم مورد نظر انتخاب شود .تابعي که (از بين دسته توابع براي تقريب) خطاي تقريب را کمترين مي سازد بعنوان بهترين تقريب (Best Approximation) ناميده مي شود .

داده هاي گسسته (Discrete Data) :

٦-١- روش حداقل مربعات

روش حداقل مربعات از جمله موارد تقريبي است كه بسيار مورد استفاده قرار مي گيرد . اين روش براي تقريب تابع f(x) كه ممكن است بوسيله داده هاي جدولي باشد ويا بطور صريح در يك بازه معين داده شده باشد . در اين روش ما به ترتيب از نرم اقليدسي (6.4) و (6.7) استفاده مي كنيم . از ديدگاه روش حداقل مربعات ، بهترين تقريب زماني كه ثابتهاي C_i براي $i=0(1)n$ بطريقي تعيين مي شوند كه در مجموع $w(x)E^2$ روي يك دامنه داده شده D بحد امكان كوچكتر گردد . براي تابعي كه مقادير آن در N+1 نقطه $x_n,\ldots,x_1,x_0$ داده شده باشد داريم :

$$I(C_0,C_1,\ldots,C_n)=\sum_{k=0}^{N}w(x_k)\left[f(x_k)-\sum_{i=0}^{n}C_i\phi_i(x_k)\right]^2=\min \qquad (8.3)$$

براي تابعي كه در [a,b] پيوسته باشد وبطورصريح داده شده باشد داريم :

$$I(C_0,C_1,\ldots,C_n)=\int_a^b w(x)\left[f(x)-\sum_{i=0}^{n}C_i\phi_i(x)\right]^2dx=\min \qquad (8.4)$$

$\phi_i(x)$ توابع Coordinate معمولاً بفرم زير انتخاب مي گردند :

$$\phi_i(x)=x^i\ ,\ i=0(1)n\ ,$$

و $w(x)=1$ شرط لازم براي آنكه (6.3) و(6.4) مينيمم گردند آن است كه :

$$\frac{\partial I}{\partial c_i}=0 \qquad , \qquad i=0(1)n \qquad (8.5)$$

اين شرط يك دستگاه خطي (N+1) معادله و (N+1) مجهول $C_n,\ldots,C_1,C_0$ را ايجاد مي نمايد كه معادلات نرمال خوانده ميشوند .معادلات نرمال براي (٨,٣) و (8.5) به ترتيب بصورت زير خواهند بود :

$$\sum_{k=0}^{N} w(x_k)\left[f(x_k) - \sum_{i=0}^{n} C_i \phi_i(x_k) \right] \phi_j(x_k) = 0 \quad , j = 0(1)n \qquad (8.6)$$

$$\int_a^b w(x)\left[f(x) - \sum_{i=0}^{n} C_i \phi_i(x) \right] \phi_j(x) dx = 0 \quad , j = 0(1)n \qquad (8.7)$$

در زير ابتدا ما روش حداقل مربعات گسسته را ساده ترين شكل آن بكار مي گيريم .ساده ترين تابعي كه مي توان ازيك سري نقاط بگذرانيم يك خط مستقيم است مانند :

$$g(x) = C_0 + C_1 x$$

$$I_K = y_k - g(x_k) = y_K - (C_0 + C_1 x_k) \ , \quad k = 0(1)N$$

$$I = \sum_{k=0}^{N} d^2{}_k = \sum_{k=0}^{N} \left[\left(y_k - (C_0 + C_1 x_k) \right) \right]^2$$

اگر بخواهيم I حداقل شود بايد C_1, C_0 رابطريقي بيابيم كه I مينيمم گردد .

پس بايد :

$$\frac{\partial I}{\partial C_0} = -2\sum_{k=0}^{N} \left[y_k - (C_0 + C_1 x_k) \right] = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{k=0}^{N} (C_0 + C_1 x_k) = \sum_{k=0}^{N} y_k$$

$$\frac{\partial I}{\partial C_1} = -2\sum_{k=0}^{N} x_k \left[y_k - (C_0 + C_1 x_k) \right] = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{k=0}^{N} x_k (C_0 + C_1 x_k) = \sum_{k=0}^{N} x_k y_k$$

روابط فوق را با تقسيم بر 2- مي توان با نمايش ماتريس زير هم نشان داد :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = N \ , \quad A_{12} = \sum_{k=0}^{N} x_k \quad , \quad Z_1 = \sum_{k=0}^{N} y_k$$

$$A_{21} = \sum_{k=0}^{N} x_k \quad , \quad A_{22} = \sum_{k=0}^{N} x^2{}_k \quad , \quad Z_2 = \sum_{k=0}^{N} x_k y_k$$

از حل دستگاه فوق داريم :

$$C_0 = \frac{A_{22} Z_1 - A_{12} Z_2}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}} \qquad , \qquad C_1 = \frac{A_{11} Z_2 - A_{21} Z_1}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}$$

مثال ۱-8 : از رابطه زير با كمك رابطه فوق يك خط عبور مي دهيم

k	x_k	y_k	x^2_k	$x_k y_k$
1	0.1	0.61	0.01	0.061
2	0.4	0.92	0.16	0.368
3	0.5	0.99	0.25	0.495
4	0.7	1.52	0.49	1.064
5	0.7	1.47	0.49	1.029
6	0.9	2.03	0.81	1.827
	3.3	7.54	2.21	4.844

$$A_{11} = 6$$
$$A_{12} = \sum x_k = A_{21} = 3.3$$
$$A_{22} = \sum x^2{}_k = 2.21$$
$$Z_1 = \sum y_k = 7.54$$
$$Z_2 = \sum_{k=0} x_k y_k = 4.844$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 \\ 3.3 & 2.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \frac{2.21 \times 7.54 - 3.3 \times 4.844}{6 \times 2.22 - 3.3 \times 3.3} = 0.2862$$

$$C_1 = \frac{6 \times 4.844 - 3.3 \times 7.54}{6 \times 2.22 - 3.3 \times 3.3} = 1.7646$$

$$g(x) = 0.2862 + 1.7646x$$

روش حداقل مربعات در حالت كلي :

مسأله كلي تقريب سازي مجموعه اي از داده ها يعني $\{(x_i,y_i)|\ i=1(1)M\}$ با يك چندجمله اي درجه n ام مانند :

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j \qquad n<M$$

$$I=\sum_{i=1}^{M}I_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{M}\left[y_i-p_n(x_i)\right]^2$$
$$=\sum_{i=1}^{M}y_i^{\,2}-2\sum_{i=1}^{M}p_n(x_i)y_i+\sum_{i=1}^{M}(p_n(x_i))^2$$
$$=\sum_{i=1}^{M}y_i^{\,2}-2\sum_{i=1}^{M}(\sum_{j=0}^{M}a_jx_i^{\,j})y_i+\sum_{i=1}^{M}(\sum_{j=0}^{n}a_jx_i^{\,j})^2$$
$$=\sum_{i=1}^{M}y_i^{\,2}-2\sum_{j=0}^{n}a_j\sum_{i=1}^{M}x_i^{\,j}y_i+\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}a_ja_k(\sum_{i=1}^{M}x_i^{\,j+k})$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j}=-2\sum_{i=1}^{M}x_i^{\,j}y_i+2\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{i=1}^{M}x_i^{\,j+k} \qquad j=0(1)n$$

سرانجام معادله نرمال به صورت :

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{i=1}^{M}x_i^{\,j+k}=\sum_{i=0}^{M}y_ix_i^{\,j} \qquad j=0(1)n$$

يا بصورت زير :

$$\begin{cases}a_0\sum_{i=0}^{M}1+a_1\sum_{i=0}^{M}x_i^{\,1}+\ldots+a_n\sum_{i=0}^{M}x_i^{\,n}=\sum_{i=0}^{M}y_i\\ a_0\sum_{i=0}^{M}x_i^{\,1}+a_1\sum_{i=0}^{M}x_i^{\,2}+\ldots+a_n\sum_{i=0}^{M}x_i^{\,n+1}=\sum_{i=0}^{M}y_ix_i^{\,1}\\ a_0\sum_{i=0}^{M}x_i^{\,n}+a_1\sum_{i=0}^{M}x_i^{\,n+1}+\ldots+a_n\sum_{i=0}^{M}x_i^{\,2n}=\sum_{i=0}^{M}y_ix_i^{\,n}\end{cases}$$

با حل دستگاه فوق مي توان $a_n,\ldots a_1,a_0$ را يافت .

مثال ۲-8 : حال اگر از نقاط مثال فوق يك چند جمله اي درجه دوم عبور دهيد :

i	x_i	y_i	x^2_i	x^3_i	x^4_i	x_iy_i	$x^2_iy_i$
1	0.1	0.61	0.01	0.001	0.0001	0.061	0.0061
2	0.4	0.92	0.16	0.064	0.0256	0.368	0.1472
3	0.5	0.99	0.25	0.125	0.0625	0.495	0.2475
4	0.7	1.52	0.49	0.343	0.2401	1.064	0.7448
5	0.7	1.47	0.49	0.343	0.2401	1.029	0.7203
6	0.9	2.03	0.81	0.729	0.6561	1.827	1.6443
	3.3	7.54	2.21	1.605	1.2245	4.844	3.5102

$$M = 6 \qquad \sum x_i = 3.3 \qquad \sum x_i^2 = 2.21 \qquad \sum x_i^3 = 1.605 \qquad \sum x_1^4 = 1.2245$$
$$\sum y_i = 7.54 \qquad \sum x_i y_i = 4.844 \qquad \sum x_i^2 y_i = 3.5102$$

$$\begin{bmatrix} M & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_1^2 y_i \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 & 2.21 \\ 3.3 & 2.21 & 1.605 \\ 1.21 & 1.605 & 1.2245 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \\ 3.502 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 & 2.21 \\ 0 & 0.395 & 0.3895 \\ 0 & 0 & 0.0264 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 0.697 \\ 0.0457 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1.7312 \\ a_1 = 0.0576 \\ a_0 = 0.5873 \end{cases}$$

توجه :

در حل معادلات فوق دستگاه حاصله اغلب نسبت به خطاي گردكردن حساس هستند . اين پديده هنگامي رخ مي دهد كه دترمينان ماتريس ضرائب دستگاه معادلات عدد كوچكي باشد يا به عبارت ديگر دستگاه حاصله بد وضع مي شوند .لذا بايستي دقت كرد وهمواره مشكلات حل دستگاه هاي حاصله را مدنظر قرار داد .

٤-8 تقريب كمترين مربعات پيوسته :

فرض مي كنيم $f \in c[a,b]$ ويك چند جمله اي درجه n ام مانند $P_n(x)$ مفروض باشد :

$$\left\| f(x) - p_n(x) \right\|_2 = \left[\int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx \right]^{1/2} = \min$$

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_a^b \left[f(x) - \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right) \right]^2 dx$$

$$= \int_a^b f^2(x) dx - 2\int_a^b f(x) \sum_{j=0}^{n} a_j x^j dx + \int_a^b \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0 \qquad j = 0(1)n$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = -2\int_a^b x^j f(x) dx + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = 0 \qquad j = 0(1)n$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx \qquad j = 0(1)n$$

مثال 8 -٤ : چندجمله اي تقريبي كمترين مربعات درجه دوم را براي $f(x) = \sin \pi x$ در فاصله $[0,1]$ پيدا كنيد .

$$p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\sum_{k=0}^{2} a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j \sin \pi x \, dx \qquad j = 0(1)2$$

$$a_0 \int_0^1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 x \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_3 \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx$$

$$a_0 = -0.050465 \quad , \quad a_1 = 4.12251 \quad , \quad a_2 = -4.12251$$

تمرينهاي فصل :

۱-براي مقادير تابع داده شده در جدول زير تركيبي از توابع نمايي به فرم $f = a + bx$ با استفاده از روش حداقل مربعات تقريب بزنيد

t	0.1	0.2	0.3	0.4
f(t)	0.76	0.58	0.44	0.35

۲-يكنفر دونده يك مسير مشخص را در پنچ روزمتوالي دويد وهربار زمان لازم براي پيمودن را يادداشت كرده است كه به شرح زير است :

X روزها	1	2	3	4	5
زمان y	15.30	15.10	15.00	14.50	14.00

با استفاده از روش حداقل مربعات تقريبي به فرم $a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ را براي داده هاي فوق تقريب بزنيد .

۳-براي تابع $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ با استفاده از روش حداقل مربعات يك چند جمله اي درجه دوم تقريب بزنيد بطوريكه $-1 \le x \le 1$ باشد .

٤-با استفاده از روش حداقل مربعات منحني $y = ae^{bx}$ را براي داده هاي جدول زير برازش كنيد .

t	0.1	0.2	0.4	0.5	1	2
y	21	11	7	6	5	6

٥-يك چندجمله اي بفرم $ax^2 + bx + c$ بر اساس حداقل مربعات براي تابع 2^x در نقاط $x_i = 0,1,2,3,4$ تقريب بزنيد .